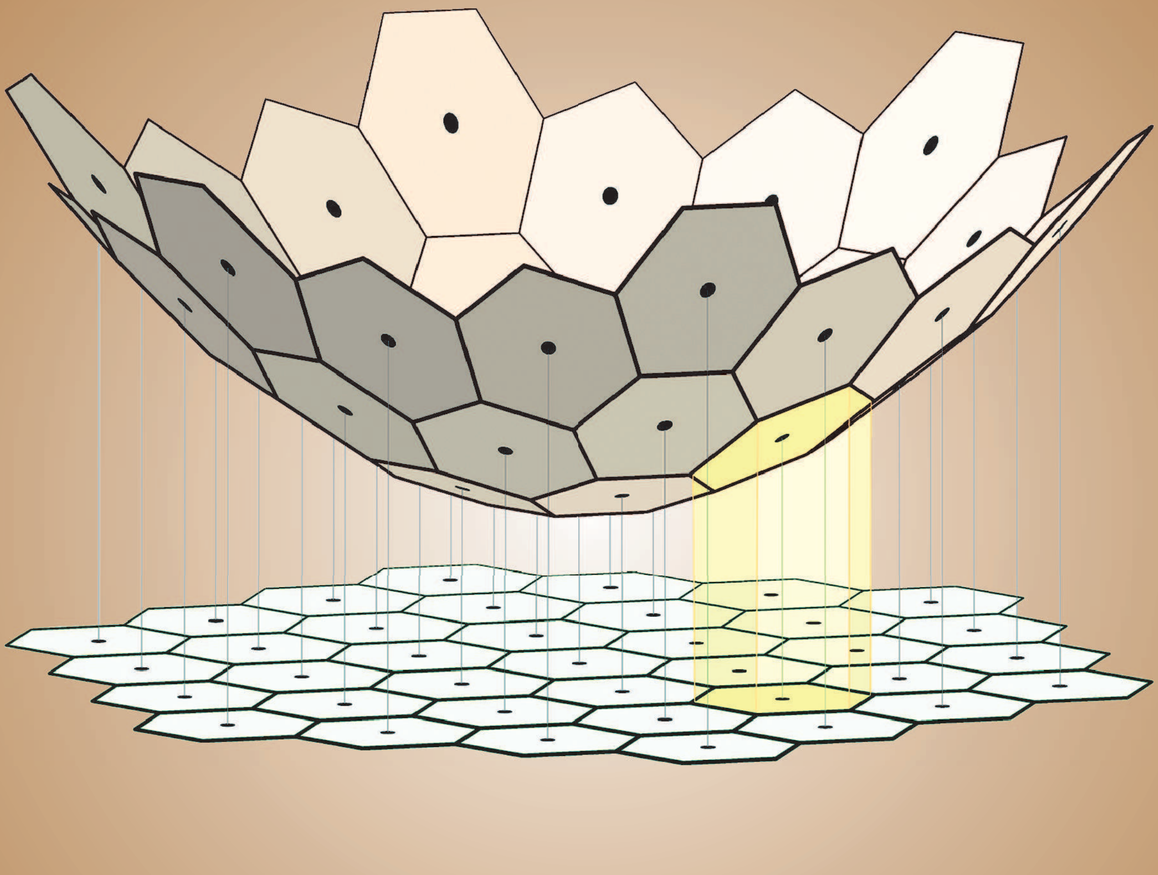
ISSN 0130-2221
ЯНВАРЬ
2019 · № 1

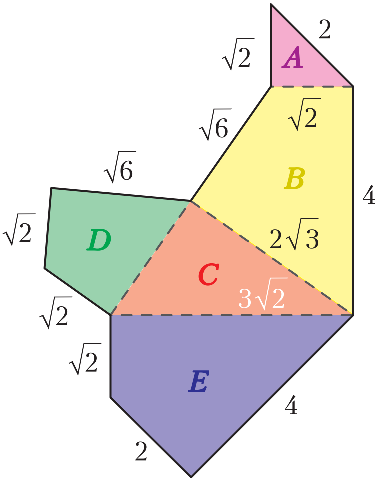
КВАНТ

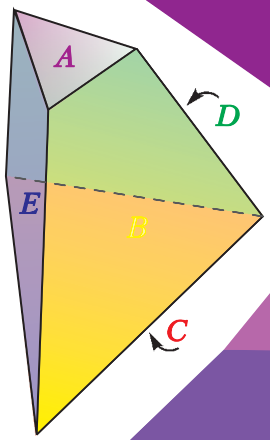
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Пентадроны

Пентадрон – это многогранник с пятью гранями, показанный на рисунке справа. На фотографии можно посмотреть на него с разных сторон. Размер и форма граней подобраны специально, длины ребер указаны на выкройке слева. Обратите внимание, что при склейке пентадрона по этой выкройке загибать грани по пунктирным линиям можно двумя способами: на себя и от себя. Эти два способа дают зеркально-симметричные варианты пентадрона.

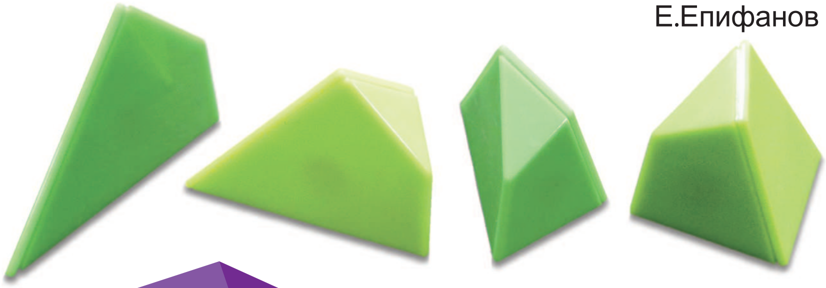




Чем же примечателен пентадрон? Оказывается, он служит «универсальным кирпичиком» для параллелоэдров – выпуклых многогранников, обладающих таким замечательным свойством: копиями параллелоэдра, которые получаются друг из друга параллельным переносом, можно замостить все трехмерное пространство (подробнее о параллелоэдрах см. статью Н.Долбилина). Это значит, что из пентадронов можно составить параллелоэдр каждого из существующих типов. Это свойство не так давно открыли математики Хёну Сон (Hyunwoo Seong) и Джин Акияма (Jin Akiyama).

Например, чтобы сложить куб, необходим набор из 12 пентадронов (по 6 штук каждого из вариантов ориентации). Это непростая пространственная головоломка! Для других параллелоэдров потребуется больше пентадронов (можно либо склеить их все из бумаги по приведенной выкройке, либо заказать набор пластиковых пентадронов в интернете – в них встроены магниты, поэтому складывать будет удобнее).

Е.Епифанов



КВАНТ

ЯНВАРЬ 2019 № 1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Петр Леонидович Капица. *Л.Белопухов*

12 Г.Ф.Вороной и геометрия чисел. *Н.Долбилин*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

21 Задачи М2542–М2545, Ф2549–Ф2552

22 Решения задач М2530–М2533, Ф2537–Ф2540

29 Высоты треугольника и обратный ход. *П.Кожевников*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Замощения параллелоэдрами

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

34 Задачи

35 Добрыня и куча камней. *В.Клепцын*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

38 Задачи 17–20

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

39 Господин Великий Косинус. *А.Стасенко*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

42 Законы отражения и преломления света. *А.Черноуцан*

ОЛИМПИАДЫ

50 XL Турнир городов. Задачи осеннего тура (2018 год)

ИНФОРМАЦИЯ

52 Заочная физико-техническая школа при МФТИ

60 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (59, 64)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье Н.Долбилина*

II *Коллекция головоломок*

III *Шахматная страничка*

IV *Прогулки с физикой*

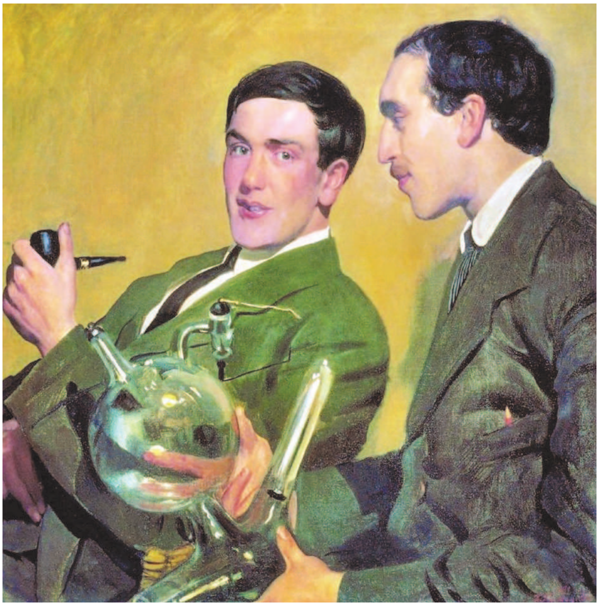
Петр Леонидович Капица

(к 125-летию со дня рождения)

Л.БЕЛОПУХОВ

ОДНАЖДЫ В 1921 ГОДУ ДВА МОЛОДЫХ человека, поклонники живописи Б.М.Кустодиева, зашли в мастерскую этого петроградского художника и попросили его нарисовать их парный портрет. А Кустодиев как раз в это время прославился портретами известных людей (особенно портретом Ф.И.Шаляпина). Они сказали, что пока их никто не знает, но вся известность у них впереди. Художнику они понравились своей уверенностью в будущей известности, и он согласился.

Через несколько десятков лет эти молодые люди действительно стали всемирно известными учеными, лауреатами Нобелевской премии: один по физике, другой по химии. Тот, который с трубкой, это 27-летний Петр Леонидович Капица, другой – 25-летний Николай Николаевич Семенов.



DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190101

Петр Леонидович Капица (1894–1984) – великий физик и инженер. В физике он прежде всего – экспериментатор. Его работы по физике и технике сверхсильных магнитных полей, по физике и технике низких температур, по сверхтекучести жидкого гелия, по электронике больших мощностей и физике высокотемпературной плазмы – это классика современного физического эксперимента. Во многом эти эксперименты способствовали развитию квантовой физики в ее конкретных применениях.

Шедевром инженерных идей Капицы было усовершенствование адиабатического метода получения сверхнизких температур с предварительным сжатием газа турбиной, источником энергии которой была отнимаемая у газа теплота. Коэффициент полезного действия холодильной машины Капицы – турбодетандера – был необычайно высоким (выше 80%), что позволило заметно удешевить производство так необходимого ему жидкого гелия. Но оказалось не менее важным и применение турбодетандеров для получения жидкого азота и, особенно, жидкого кислорода.

Не меньшую известность, чем в физике, Капица заслужил своей общественной позицией, основанной на жизненной философии. Директор Института физических проблем с 1990 по 2017 год, ученик Капицы и Ландау, академик А.Ф.Андреев так пишет о нем: «На долю Капицы выпало много страданий и много побед. Как в научном, так и в человеческом плане. При всей глубокой индивидуальности Петра Леонидовича, а может быть именно вследствие этого, его судьба многократно воспроизводит картину времени».

Даже кратко трудно рассказать о жизни и судьбе П.Л.Капицы. Его отец Леонид Петрович Капица произошел из польско-молдавского шляхетского рода Капиц-Мислевских. Он закончил Николаевскую военно-инженерную академию и стал военно-морским инженером, строителем портовых сооружений, одним из создателей укреплений Кронштадского военно-морского порта, имел чин генерал-майора инженерного корпуса. Умер он в 1920 году. Мать Капицы Ольга Иеронимовна Стебницкая, дочь военного картографа, главного геодезиста Кавказа, окончила знаменитые женские Бестужевские курсы. Она стала специалистом по детской литературе и фольклору, преподавала в Ленинградском педагогическом институте имени А.И.Герцена. Умерла она в 1937 году.

Безмятежные детство и отрочество Капицы были украшены летними путешествиями по Европе с матерью или отцом. В 18 лет, закончив Кронштадское реальное училище, Капица поступает на электромеханический факультет Петербургского политехнического института, созданный и руководимый физиком А.Ф.Иоффе. Он вскоре привлек талантливого второкурсника к научной работе в физической лаборатории.

Интересно, что свои первые летние каникулы в 1913 году Капица проводит с братом Леонидом, студентом-географом, на русском Севере, на Соловках и на побережье Кольского полуострова, собирая этнографические материалы. Появляется первая журнальная работа – научно-популярная статья «Рыбий жир». Но уже во вторые каникулы его интересует не этнография, а инженерные вопросы строительства кораблей. И он проводит эти каникулы в Шотландии, живет в семье предпринимателя-кораблестроителя и по примеру Петра Великого осваивает рабочие профессии корабела.

Из-за разыгравшейся мировой войны он смог вернуться в Россию только в 1915 году и немедленно зачислился добровольцем – шофером и механиком в санитарный фронтовой отряд. К учебному году он возвращается на учебу на третий курс института. В это время он знакомится с 18-летней Надеждой Кирилловной Черносвитовой, дочерью крупного политика, члена ЦК партии кадетов, расстрелянного в 1918 году. Она становится его невестой. Девушка живет в Шанхае, в семье своего брата, сотрудника Русско-Азиатского банка, и учится в шанхайской русской гимназии. Летом 1916 года Капица едет в Шанхай и привозит невесту в Россию. В имении отца невесты состоялась свадьба.

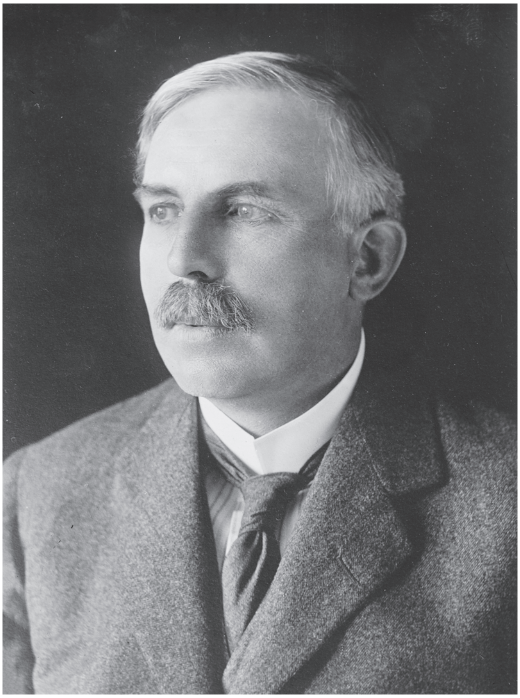
В это же время публикуются две первые научные работы молодого студента, одна – теоретическая, другая – экспериментальная. Экспериментальная особенно интересна. В ней Капица излагает созданный им метод изготовления очень тонких металлических нитей. Метод заключался в стрельбе вверх из устройства, похожего на мальчишескую рогатку, кусочком затвердевающего расплавленного металла, который по мере полета и превращался в застывшую тончайшую, но прочную нить.

Богато событиями для Капицы лето 1917 года – практика в радиотелеграфном отделении завода-концерна «Сименс и Гальске» и рождение сына Иеронима. Еще полтора года учебы и научной работы, и Капица – инженер-электрик, преподаватель Политехнического института и научный сотрудник Физико-технического института (в лаборатории А.Ф.Иоффе).

Наступает зима 1919-20 года. В течение месяца эпидемия гриппа («испанка») уносит отца, сына и жену с новорожденной дочерью. Спасение от удара судьбы – только в научной работе и нежной опеке матери. Не оставляют и друзья. С самым близким другом, Николаем Николаевичем Семеновым, Капица рассчитывает взаимодействие атомов с сильно неоднородным магнитным полем и обсуждает идею экспериментальной установки для изучения этого взаимодействия. Но публикация этой работы не состоялась – в России еще не было своего физического журнала, а добраться до европейских научных журналов не представлялось возможным. Поставить реальный эксперимент было невозможно из-за отсутствия необходимого оборудования. В 1922 году аналогичную работу выполняют немецкие физики О.Штерн и В.Герлах и публикуют свои результаты, сыгравшие важную роль в становлении квантовой атомной физики. В 1943 году Штерн стал нобелевским лауреатом «за ...измерение магнитного момента протона», а раздел «опыты Штерна и Герлаха» включен во все современные учебные программы вузовских курсов физики.

Чтобы спасти Капицу от развивающейся депрессии, А.Ф.Иоффе включает его в состав комиссии Российской академии наук, направляемой, по предложению В.И.Ленина, в страны Западной Европы для восстановления научных связей, приобретения приборов и научной литературы. Вот как высоко ценило фундаментальную науку и понимало ее необходимость тогдашнее руководство страны, разрушенной революциями и гражданской войной. Перед отъездом Капицы и был написан тот самый парный портрет двух друзей.

При посещении Кембриджской лаборатории 27-летний инженер П.Л.Капица обращается к ее руководителю, знаменитому физику Э.Резерфорду, с просьбой взять



Эрнест Резерфорд

его на стажировку. Тот, естественно, отказывает, мотивируя это отсутствием свободных вакансий и опасностью риска брать на работу к себе неизвестного человека, да еще и из Советской России. Тогда Капица задает Резерфорду вопрос: «А какой процент ошибки вы допускаете в своих экспериментах?» Резерфорд не понимает, к чему этот вопрос, но отвечает: «Ну, обычно, три-четыре процента». А Капица в ответ: «У вас 30 сотрудников, пусть будет 31, это и будет три процента. Можете рискнуть». Ошеломленный остроумием и находчивостью Капицы, Резерфорд берет его к себе на стажировку и никогда потом об этом не пожалеет.

Уже через два года Капица создает импульсный генератор для получения магнитных полей. Физическая суть этой работы проста – заряженный большим зарядом аккумулятор разряжается через маленький соленоид. Сила тока в соленоиде при этом достигает десятков тысяч ампер, а рождаемое им магнитное поле – десятков тесла, что в десять тысяч раз больше индукции магнитного поля Земли. Разряд был импульсным, длился сотые доли секунды, и соленоид не успевал нагреться до разрушающей температуры. Но за это время можно было успеть зафиксировать все, что происходит с заряженными частицами в магнитном поле. Любопытно, что это были альфа-частицы, т.е. ядра атомов гелия. А через несколько лет Капица начинает опыты именно с жидким гелием, опыты, которые его прославили.

Капица становится доктором Кембриджского университета, заместителем Э.Резерфорда. Создает в Кембридже физический семинар, получивший впоследствии название «клуб Капицы», где в неформальной обстановке обсуждаются проблемы не только физики. Между делом Капица становится чемпионом по шахматам графства Кембриджшир.

Капица быстро прославился среди ученых Кембриджа своей эксцентричностью. Именно он придумал Резерфорду прозвище «крокодил». Оно вскоре стало широко применяемым и, по-видимому, понравилось самому прообразу. Когда в 1933 году было закончено строительство Мондовской лаборатории для Капицы, то при ее торжественном открытии выяснилось, что солидный входной ключ представлял собой фигуру крокодила, открывающего замок, а в вестибюле лаборатории всех встречал барельеф, на котором был изображен крокодил. Резерфорд промолчал, а почти все присутствовавшие одобрили подобную вольность, особенно Нильс Бор.

Вот еще одна черта эксцентричности Капицы. Огромным удовольствием для него была бешеная езда на мощном автомобиле. Его нормой была скорость 60 миль в час (около 110 км/ч), тогда как разрешенный максимум был 40 миль в час. Когда однажды перепуганный пассажир, священник и историк Симпсон, обратил внимание Капицы на показания спидометра, он ответил, что это специально переделанный для него прибор и что он показывает не английские мили, а русские километры. А перед опасным поворотом приговаривал: «Молитесь, Симпсон, молитесь богу!»

Искренняя дружба связывала П.Л.Капицу с Н.Н.Семеновым еще со студенческих времен. До преклонных лет они и в письмах, и в живом общении называли друг друга «Петька» и «Колька». После отъезда Капицы в Кембридж они не виделись несколько лет. В 1926 году Семенов командируется в Англию и Францию. В Кембридже он встречается с другом «Петькой» и знакомит его со своей женой. А в Париже жена Семенова знакомит Капицу со своей гимназической подругой Анной Алексеевной Крыловой, дочерью крупного ученого, математика и кораблестроителя А.Н.Крылова. Гражданская война разрушила его семью – погибли два сына (деникинские офицеры), а жена с дочерью эмигрировали во Францию.

В свои 23 года Анна успела много пережить и тосковала в Париже по своей родине и окружавшей ее с детства обстановке русской научной культуры. У нее оказалось много общего с молодым русским физиком. В 1927 году Петр Капица и Анна Крылова соединили свои судьбы. Они прожили вместе 57 лет. Анна Алексеевна не только сумела создать Капице прочно обеспеченный семейный «тыл», но и была главной его моральной опорой во всех невзгодах, во всех несправедливостях жизни.

Анна Алексеевна и Петр Леонидович (Париж, 1927 г.)

В Кембридже рождается их сын Сергей (1928–2012), тоже физик, но получивший бóльшую известность как популяризатор науки, создатель и в течение почти 40 лет бессменный ведущий знаменитой научно-популярной телепередачи «Очевидное – невероятное». Сегодня в Москве наряду с улицей Академика Капицы есть и улица Сергея Капицы.

Через три года рождается второй сын Андрей (1931–2011), географ, исследователь последнего в XX веке крупного географического открытия – существования огромного подледного озера в Антарктиде, инициатор создания и первый директор Тихоокеанского института географии Дальневосточного научного центра АН СССР.

Научные интересы Капицы все больше сосредотачиваются на получении жидкого гелия и изучении его свойств. Его инженерный талант и умение привлекают внимание многих промышленных фирм – его приглашают для консультаций, в том числе и в военно-промышленные организации. Консультации щедро оплачиваются. Капица становится материально обеспеченным человеком. С одной из таких консультаций связан знаменитый, нет, не анекдот, а рассказ о реальном событии. При оговоренной оплате за консультацию в тысячу фунтов стерлингов Капица осматривает непонятно по какой причине неработающий агрегат. Он знакомится с чертежами, внимательно исследует все узлы агрегата и вдруг наносит сильный удар в один из узлов машины. Машина заработала и продолжала исправно работать. Заказчики заявили: «За что же платить 1000 фунтов?» Капица ответил: «За удар – один фунт, а 999 фунтов за то, что нужно было знать, куда ударить».

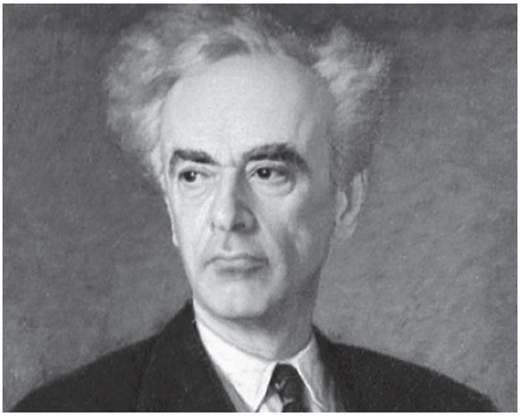
И вдруг все изменилось. В один из ежегодных приездов на летний отдых и чтение лекций в Москве, Ленинграде и Харькове в 1934 году его заграничная виза аннулируется и он лишается международного паспорта. Формальной причиной этого стали его консультации «буржуазным» фирмам, в том числе и военно-промышленным. Жена уезжает к оставшимся в Кембридже с бабушкой сыновьям. А Капица занимает непримиримую позицию и заявляет, что если ему не обеспечат то же самое научное оборудование, которое он организовал в Кембридже, то он оставляет физику и идет работать рядовым инженером в биологический институт к великому И.П.Павлову.

Резерфорд взбешен этим поступком советского правительства и инициирует осудительную кампанию в прессе. Правительство СССР струсило и издает постановление о создании для Капицы специального института и закупке в Англии у Резерфорда оборудования кембриджской лаборатории. Резерфорд идет Капице навстречу, согласившись на продажу оборудования, так сказать, по себестоимости, и кроме того направляет в Москву двух инженеров для его наладки.

В Москве на выбранном Капицей месте – на Воробьевых горах, на высоком берегу Москвы-реки – строится новый академический Институт физических проблем с необходимыми службами и коттеджем для Капицы и его семьи. Капица становится директором своего института на необычных условиях полной самостоятельности в вопросах управления институтом. В нем вначале числилось всего лишь 15 научных сотрудников, зато больше 100 инженеров и техников и только 3 сотрудника для управления. В институте нет отдела кадров, Капица сам знакомится с каждым новым сотрудником – от ведущих ученых до дворника. Например, увольняет троих дворников-бездельников и заменяет их одним, но за тройную оплату, благо так называемая финансовая дисциплина его не касается. Главного бухгалтера у него нет, он сам ведает распределением средств, есть только счетовод-кассир. На должность своего помощника он находит Ольгу Александровну Стецкую, сотрудницу Н.К.Крупской, вхожую во все властные кабинеты и к тому же имевшую мужем видного партийного деятеля. Долгие годы она освобождала Капицу от всех хлопотных дел, связанных с различными «инстанциями».

А.Ф.Иоффе делает Капице «царский» подарок, отдав одного из двух братьев-стеклодувов Петушковых, необычайных умельцев по работе со стеклом (а в экспериментах с жидким гелием это было, ох, как необходимо). Главным экспериментатором у Капицы становится Александр Иосифович Шальников, будущий академик (1979), трижды лауреат Государственных (Сталинских) премий СССР, автор многих экспериментальных открытий, в которых проявлялись квантовая сущность явлений сверхтекучести, сверхпроводимости, фононного газа в кристаллах, особенности полупроводников и многое другое. А Петр Леонидович Капица, руководитель и постановщик этих работ, стал не только классиком естествознания, но и ученым, находящимся на переднем крае современной физики. Для теоретического осмысливания своих экспериментальных достижений Капица приглашает и делает заведующим теоретическим отделом института молодого, но уже ставшего европейски известным физика-теоретика Льва Давыдовича Ландау (1908–1968), будущего лауреата Нобелевской премии «за пионерские теории конденсированных сред и особенно жидкого гелия».

Важную роль сыграл организованный Капицей еженедельный семинар по физике, получивший неофициальное имя «капишник». На семинаре обсуждались не только работы института, но и все важнейшие новые научные работы по физике как



Лев Давыдович Ландау

в нашей стране, так и за рубежом. Семинар всегда вел сам Капица и вел его необычайно организованно – основной доклад и выступления были строго ограничены во времени и прерывались «на полуслове» в случае нарушения регламента. Председательствующий своими вопросами обострял самую сущность обсуждаемой проблемы. И в то же время «климат» этих семинаров был неизменно благоприятный, уважительный. И никогда на семинарах не было псевдофилософских обсуждений проблем физики или амбициозных выступлений с нападками на коллег. Выяснялась только подтверждаемая экспериментом научная истина.

В 30-е годы Капица прежде всего заканчивает свои работы по турбодетандеру, которые предопределили развитие во всем мире современных установок разделения воздуха на азот, кислород, аргон и гелий. Жидкий кислород стал одним из важнейших стратегических материалов в военные годы. Ведь сталь для танковой брони с добавками тугоплавких металлов (вольфрама и др.) можно было получить только с использованием в мартеновских печах кислородного дутья, позволяющего достичь более высокой температуры плавления такой стали. И он прилагает большие усилия для внедрения своего детища в промышленность – нашлось много противников из среды научных чиновников, желающих внедрять свои собственные изобретения и бесчестно искажавших эффективность турбодетандера. Но факт успешного применения турбодетандеров во всем мире повлиял на руководство страны, и в 1941 году Капица в числе первых ученых становится лауреатом Сталинской премии первой степени за свой турбодетандер, а в 1943 году назначается начальником «Главкислорода» – Главного управления кислородной промышленности при СНК СССР, на должность выше наркомовской. В 1945 году он становится Героем Социалистического Труда. Но эта инженерная и организационная деятельность была для Капицы в значительной степени вынужденной в связи с событиями тех лет. Капица понимал, что в грядущей войне решающую роль будут играть танковые сражения.

Основные научные интересы Капицы были сосредоточены в другой области. Имея с помощью своего турбодетандера необходимое количество жидкого гелия, он развернул работы по изучению его свойств. В 1937 году было сделано фундаментальное открытие. В чрезвычайно изящных экспериментах, изучая протекание жидкого гелия через узкие щели, Капица установил, что при температуре ниже 2,19 К исчезает его вязкость. Происходит фазовый переход (второго рода) гелия-I в гелий-II, обладающий рядом необычных свойств и прежде всего отсутствием вязкости, т.е. сверхтекучестью. Скачком меняются теплоемкость и ряд других тепловых характеристик гелия. Эти эксперименты были не просто изящными, они были очень трудными. Достаточно отметить, что на первых порах только два человека могли перелить сверхтекучий жидкий гелий из дьюаровского сосуда в пробирку – сам Капица и его главный экспериментатор Шальников, причем у Шальникова это получалось даже лучше.

Капице было ясно, что объяснение таких странных свойств гелия лежит за пределами классических представлений о веществе. И действительно, первая теория сверхтекучести была создана Л.Д.Ландау в 1941 году как квантово-механическая теория. На основе экспериментов Капицы и теории Ландау родилась физика квантовых жидкостей как макроскопическое проявление квантового поведения частиц.

В 1945 году грянула «атомная эра». В августе этого года США отомстили японскому народу за нападение японской авиации (без объявления войны) на американскую военно-морскую базу на Гавайях в декабре 1941 года. Но месть была слишком неадекватной. Тогда погибло 2403 человека и было ранено 1178. А в Хиросиме и Нагасаки почти мгновенно погибли больше 100000 человек, и еще 200000 в течение нескольких лет умирали вследствие лучевого поражения. Кроме идеи отмщения, эта акция носила очевидный характер устрашения СССР. Советским физикам стало ясно, что в вопросе использования ядерной энергии они сильно отстали от зарубежных ученых.

В 1946 году был создан специальный Государственный комитет – без названия, а просто №1 – под начальствованием Л.П.Берии. Первоначально в него входили только два физика – Капица и Курчатов. Но, в отличие от Курчатова, Капице не был доверен высший государственный секрет – получение нашей разведкой подробных (и, главное, достоверных) сведений не только принципиальных схем ядерных бомб, но и чертежей ее основных узлов. Ничего не зная об этом, Капица, движимый патриотическими чувствами, разрабатывает рассчитанный на два года проект развертывания всех работ, необходимых, по его мнению, для создания ядерного оружия. Капица удивляется, почему его проект даже не обсуждается. Он не подозревает того, что Сталин и Берия твердо решили довериться данным разведки и скопировать американскую бомбу. А Курчатову ясно, что это сможет значительно ускорить создание советской бомбы, и, самое главное, ему понятно, что после атомных бомбардировок никакого секрета уже нет. Конструкции отдельных узлов бомбы уже не имеют принципиального значения. Главная трудность состоит в наработке необходимого количества ядерного «топлива» – изотопа урана-235 и плутония.

В данных разведки Курчатов усмотрел сведения о гигантских заводах, сооруженных для этих целей в США, и понял, что это и есть основное поле деятельности Государственного комитета. Но Капица о масштабах этих работ не догадывается, он думает о создании физики бомбы. Уязвленный тем, что руководитель комитета Берия в физике ничего не понимает, он пишет Сталину письмо о его безграмотности, сравнивая Берию с дирижером, который пытается руководить оркестром, даже не зная нотной грамоты. Сталин показывает письмо Берии, и тот, взбешенный, обещает стереть великого физика «в лагерную пыль». Сталин же говорит Берии, что снимет Капицу в наказание со всех постов, но трогать его не надо.

И на другой день Капица – уже не член Государственного комитета, не начальник «Главкислорода», не директор Института физических проблем. Он – просто академик и профессор МГУ. У него отбирают оборудованный им по своему вкусу коттедж во дворе института, поскольку для прохода во двор нужен спецпропуск, который у него попросту забирают. Но Сталин оставляет ему академическую дачу в поселке Николина гора неподалеку от Звенигорода. Президент Академии наук СССР С.И.Вавилов делает все, что может. Он обеспечивает дачный сарай, который вскоре прозвали «избой физических проблем», несколькими станками, материалами, рабочими и инженером.

В «избе» работа с жидким гелием, конечно, была невозможна. И Капица переключается на совсем другие дела – создание мощных сверхвысокочастотных генераторов импульсного и непрерывного действия и изучение свойств плазмы, получающейся при действии таких генераторов на газовый разряд, в частности на изучение природы шаровой молнии, которую он смог получить в лабораторных условиях. Генераторы Капицы легли в основу устройств, оказавшихся совершенно необходимыми в современных работах по овладению термоядерной энергией в токамаках.

Для осуществления этих работ оказалось крайне важным то, что Капица был удивительно «рукастым» физиком-экспериментатором. Недаром еще Резерфорд назвал его мастером «золотые руки». Капица умел делать все – паять схемы, работать на станках, выдувать стеклянные сосуды, сооружать сложные установки. Он обучил рукоделию своих сыновей, и они на сухопутной Николиной горе и малюсенькой там Москве-реке сделали прекрасную морскую яхту и совершали на ней потом интересные путешествия.

К Капице на Николину гору приезжают друзья и коллеги, работает, хоть и не регулярно, ставший нелегальным «капишник». Блестяще продолжается его педагогическая деятельность на физико-техническом факультете МГУ.

Но в 1950 году, придравшись к пустяшному поводу, его отстраняют от руководства кафедрой на физтехе и чтения там лекций. А директорствовать в Институте физических проблем соглашается один из сподвижников И.В.Курчатова, будущий президент Академии наук СССР А.П.Александров, которому Капица так и не простил его согласия на этот пост. Впрочем, Александров сохранил все направления исследований, которыми руководил Капица, и в особенности теоретический отдел, возглавляемый Л.Д.Ландау. Так проходит восемь лет.

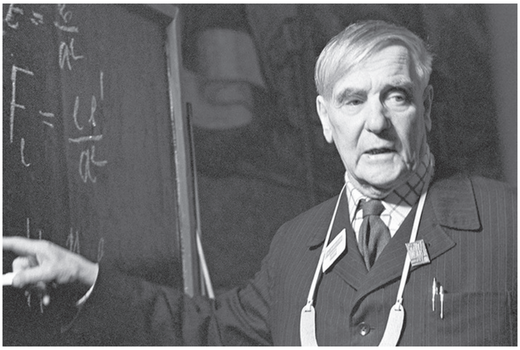
Как по мановению волшебной палочки, все изменилось после смерти Сталина и падения Берии. Капица вновь становится директором Института физических проблем и главным редактором самого авторитетного научного журнала – «Журнала экспериментальной и теоретической физики». Наряду с И.Е.Таммом, только более резко, он в Академии наук борется за восстановление в СССР биологической науки, разрушенной псевдонаучной деятельностью Т.Д.Лысенко и его последователей.

Возобновляется полноценная работа «капишника», который становится не только центром физической науки, но и культурным центром Москвы, когда на его заседаниях научная тема заменяется выступлениями артистов, писателей, поэтов. И на такие «капишники» стремилась попасть «вся Москва». В этих случаях приходилось организовывать радиотрансляцию из зала заседаний по всем помещениям здания – они были заполнены гостями.

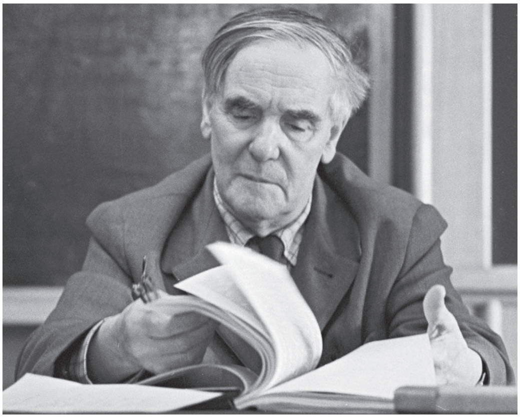
В 1974 году в дни своего восьмидесятилетия Капица становится дважды Героем Социалистического Труда. А в 1978 году его, наконец, настигла давно заслуженная Нобелевская премия «за базовые исследования и открытия в области низких температур».

Характерно, что, необычайно щедрый в жизни, Капица не отдал ни копейки из полученной премии государству. Капица любил Россию, он никогда не соглашался покинуть ее, несмотря на неоднократные предложения многих научных мировых центров. Но он активно не любил российские правительства: ни сталинское, ни хрущевское, ни брежневское. Он никак не мог примириться, например, с тем, что для получения каких-либо пустяшных материалов или деталей нужно обивать пороги, а, главное, терять месяцы, тогда как «в Англии у меня на это ушло бы два дня», как он пишет в одном из писем правительственным деятелям. Так, в эпоху становления своего института Капица обратился в один из наркоматов с просьбой об инструментах и измерительных приборах. Ему предложили оформить заявку «на будущий год»…

Капица не доверял телефону, во-первых, из-за возможного прослушивания органами, а во-вторых, из-за трудности обоснования своей позиции вследствие вынужденной краткости тогдашних телефонных разговоров (особенно, по кремлевской «вертушке»). Он предпочитал письменные объяснения. Руководителям советского государства он написал свыше



П.Л.Капица у доски



П.Л.Капица за рабочим столом

300 (!) писем, из них 50 – И.В.Сталину. Иногда были и ответы. В архиве Капицы хранится такое письмо: «тов. Капица! Все Ваши письма получил. В письмах много поучительного – думаю как-нибудь встретиться с Вами и побеседовать об этом. Что касается книги Л.Гумилевского «Русские инженеры», то она очень интересна и будет издана в скором времени. И.Сталин. 6 апреля 46 г.». Были и ответы действием.

П.Л.Капица неоднократно вступался в 30-е годы за арестованных или подвергавшихся травле ученых. По крайней мере в трех случаях письма Капицы оказались для них спасением. В 1936 году внезапно прекратилась развернувшаяся в прессе кампания травли выдающегося математика академика Н.Н.Лузина. Арестованного физика-теоретика В.А.Фока освободили через несколько дней. Труднее всего оказалась борьба Капицы за освобождение Л.Д.Ландау. Он был арестован за участие в группе, распространявшей листовки с антисоветским содержанием. И хотя его участие в этой группе было лишь формальным, на уровне разговоров, он был обвинен в шпионаже в пользу Германии. Требуя от него подтверждения такого чудовищного обвинения, Ландау был подвергнут особо изощренной пытке голодом. Из соседнего санатория приносили столовую ложку необычайно вкусной еды, и это было все за целый день. Ему грозила смерть, но он упорно не давал никаких ложных показаний. В защиту Ландау Капица написал несколько десятков писем, ручался «за его примерное поведение» и, наконец, поехал в Кремль и заявил, что, если Ландау не освободят, он прекращает заниматься наукой. На другой день Ландау был освобожден.

В 1970-е годы, когда разгорелась травля академика А.Д.Сахарова, Капица был единственным, кто открыто восстал против исключения Сахарова из Академии наук. На заседании Президиума Академии с участием партийного начальства он нашел нужные слова: «Аналогичный позорный инцидент уже был. В 1933 году фашисты исключили из берлинской академии Альберта Эйнштейна». Наверное, после этого выступления многим академикам стало в глубине души неловко за свое непротивление начальственному нажиму. На даче Капицы неоднократно бывали и сам Сахаров, и Солженицын, и многие другие представители культуры, деятельность которых не одобрялась властью.

Вообще, гуманитарные интересы Капицы были очень широкими. Он хорошо знал европейские памятники культуры. Вернувшись в Россию, он только после войны смог найти время для экскурсии по «Золотому кольцу», как впоследствии стали называть такие поездки. Его сопровождали искусствоведы, и он прошел с ними основательный курс истории древнерусской культуры. В те годы все памятники старины Владимира, Суздаля и других городов, а особенно великая церковь Покрова на Нерли, были в запустении. Потрясенный красотой древних храмов, Капица обращается в правительство не просто с письмом. Свое обращение он назвал «Меморандум о памятниках старины Владимирской области». Это было подробное описание запустения, в котором находились памятники культуры, и в то же время детальная программа того, что необходимо сделать для восстановления и сохранения этих памятников.

Весть о присуждении Нобелевской премии застала Капицу в академическом санатории в Узком, на окраине Москвы, где он отдыхал вместе с женой. Налетевшим через час корреспондентам на вопрос о том, какие свои достижения он считает наиболее значительными, Капица сказал, что для ученого всегда наиболее важна та работа, которой он занимается в данный момент. «У меня такая работа относится к термоядерному синтезу», – добавил он. И в своей Нобелевской лекции он, допустив вольность, продолжил эту тему. Вопреки уставу Нобелевского фонда, лекция не была посвящена работам, отмеченным премией. Она называлась «Плазма и термоядерная реакция». Капица сказал, что сверхнизкими температурами он занимался очень давно, в дни научной молодости. А сейчас, наоборот, его волнуют сверхвысокие температуры, которые необходимы для инициирования и поддерживания термоядерной реакции изотопов водорода. Крайности сомкнулись. («Les extremes se touchent», – привел он знаменитое французское выражение.) Тем более, что жидкий гелий, за работы с которым присуждена награда, нужен и в этом деле для охлаждения обмоток сверхсильных магнитов, удерживающих раскаленную плазму. И он закончил лекцию словами: «Хорошо известно, что в данное время управляемая термоядерная реакция представляет большой практический интерес, так как этот процесс мог бы наиболее эффективно решить проблему глобального энергетического кризиса, связанного с истощением запасов ископаемого сырья, используемого теперь как источник энергии». Сегодня, через 40 с лишним лет, эти пророческие слова претворяются в жизнь мировым научным сообществом и правительствами ведущих стран мира, в том числе и России.

Очень важной была педагогическая деятельность Капицы. В 1945 году он был одним из главных инициаторов создания для подготовки физиков вуза нового типа, где обучение велось бы не только в стенах учебного заведения, а большей частью – в лабораториях научно-исследовательских институтов, где преподавателями должны быть ведущие ученые. И такой вуз был создан. Вначале это был секретный (атомно-ракетный) физико-технический факультет МГУ, а в 1951 году он стал Физико-техническим институтом, знаменитым Физтехом. Капица возглавил там кафедру общей и экспериментальной физики. В первые годы лекции по этому предмету читали по очереди сам Капица и Ландау. Теоретик Ландау излагал теоретические основы очередной темы, а на следующей лекции Капица рассказывал об экспериментальных и исторических основах этого раздела физики. Это было потрясающе интересно. Студенты после предыдущего занятия стремглав неслись по коридорам Физтеха, чтобы успеть занять места поближе к замечательным лекторам.

В книге «П.Л.Капица. Эксперимент. Теория. Практика» (М.: Наука, 1974) собраны статьи и выступления Капицы по самым разным темам. Книга позволяет понять необычайный дар Капицы рассказывать о самых сложных проблемах науки доходчиво и интересно. Его сын, С.П.Капица, получил от отца часть этого дара и на Физтехе принял эстафету преподавания физики, став профессором кафедры общей физики и ее заведующим.

Знаменитый английский физик Поль Дирак был большим другом Капицы. Он неоднократно приезжал в Советский Союз увидеться с ним и с другим своим другом, И.Е.Таммом. В свой последний приезд в 1973 году Дирак часто бывал у Капицы на даче (И.Е.Тамма уже не стало). И когда Капица рассказал очередную историю из своей жизни, а рассказчик он был замечательный, Дирак не удержался от эмоционального: «Капица! Какая замечательная жизнь, я завидую Вам».

Действительно, жизнь Капицы – яркий пример беззаветного служения науке и бесстрашия перед лицом невежества и властности. Даже в самые мрачные времена советского изоляционизма Капица всегда отстаивал принципы интернационализма в науке. «Я твердо верю в интернациональность науки и верю в то, что настоящая наука должна быть вне всяких политических страстей и борьбы, как бы ее туда ни стремились вовлечь» (из письма Молотову от 7 мая 1935 г.).

Скончался Петр Леонидович Капица от инфаркта 8 апреля 1984 года, немного не дожив до своего девяностолетия.

Г. Ф. Вороной и геометрия чисел

Н.ДОЛБИЛИН

В этой статье мы постараемся описать общие контуры геометрии чисел – науки, которой Георгий Феодосьевич посвятил самые глубокие свои работы. Одна из них – о плотнейших упаковках шаров в многомерных пространствах – появилась на последнем году жизни. Другая – по теории параллелоэдров – была опубликована уже посмертно.

Перенесемся в 1904 год, когда в живописном немецком городе Гейдельберге состоялся третий Международный конгресс математиков. На этот конгресс пригласили выступить с докладом и Георгия Феодосьевича Вороного и Генриха Минковского (1864–1909), одного из крупнейших геометров XIX века. «Приглашенный доклад» на международном конгрессе – это очень престижное предложение, которого удостаиваются математики, добившиеся выдающихся результатов.

Минковский за 8 лет до этого, в 1896 году, опубликовал знаменитую работу «Геометрия чисел» (по-немецки «Geometrie der Zahlen»), в которой заложил основы новой области математики – геометрии чисел. Основная идея этой науки, находящейся на стыке геометрии и теории чисел, состоит в том, что в теории чисел есть немало задач, которые можно переформулировать на геометрическом языке, после чего задача становится более прозрачной и появляется возможность применять геометрические методы для ее решения. Самая известная, пожалуй, геометрическая теорема, которая помогает решать задачи по теории чисел, – это теорема Минковского о центрально-симметричном выпуклом теле (фигуре).

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190102

Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат (x, y) и множество всех целых точек, т.е. точек, у которых обе координаты – целые числа. Это множество называется *квадратной решеткой* (рис.1).

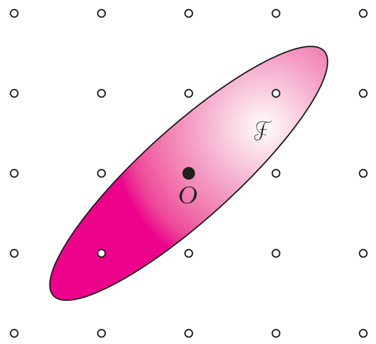


Рис. 1

Далее, фигура $\mathcal{F}$ называется *выпуклой*, если для любых двух точек A и B из $\mathcal{F}$ соединяющий их отрезок $[AB]$ целиком принадлежит фигуре. Фигура $\mathcal{F}$ имеет *центр симметрии*, т.е. такую точку $O \in \mathcal{F}$, если для всякой точки $X \in \mathcal{F}$ симметричная ей относительно O точка X' также принадлежит фигуре $\mathcal{F}$. Фигура с центром симметрии называется *центрально-симметричной*.

Например, круг является выпуклой центрально-симметричной фигурой, а треугольник – выпуклой, но не центрально-симметричной. Знаменитая теорема Минковского утверждает:

Пусть центр симметрии O расположен в точке решетки. Тогда если площадь фигуры $s(\mathcal{F}) \geq 4 = 2^2$, *то внутри или на границе фигуры содержится хотя бы одна пара симметричных относительно O точек решетки, отличных от точки O.*

Теорема Минковского верна для любой размерности, в том числе и для кубической решетки в трехмерном пространстве. Только в этом случае речь идет о выпуклом центрально-симметричном теле $\mathcal{F}$, объем которого $v(\mathcal{F}) \geq 8 = 2^3$.

Вороной и Минковский встретились и беседовали во время конгресса. Борис Николаевич Делоне слышал от отца, который тоже был приглашен на этот конгресс, что Минковский отнесся к Вороному и его работам с огромным интересом и величайшим уважением.

Геометрия чисел по духу была близка Вороному всегда: вспомним слова Делоне о том, что Вороной мыслил геометрически. В 1908 году по окончании работы над мемуаром по теории параллелоэдров Вороной писал, что работать над ним он начал лет за 12 до того, т.е. в то время, когда Минковский работал над своей «Геометрией чисел». Но полностью Георгий Феодосьевич переключился на геометрию чисел лишь после 1904 года.

Положительные квадратичные формы

Вороной создал важный метод в геометрии чисел – геометрию положительных квадратичных форм и применил ее к решению двух труднейших проблем: проблемы нахождения плотнейшей упаковки пространства равными шарами и проблемы отыскания параллелоэдров в пространствах произвольной размерности. Здесь уместно сказать, что эти проблемы в многомерных пространствах имеют не только чисто математический интерес, но и важные приложения, например в теории кодирования.

Сейчас мы постараемся объяснить связь между положительными квадратичными формами и упаковками шаров на примере плоскости. В случае двух измерений мы имеем дело с квадратичными формами от двух переменных и упаковками плоскости равными кругами.

Напомним, квадратичная форма $f(x, y)$ от двух переменных – это однородный многочлен 2-й степени вида

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2. \qquad (1)$$

Квадратичная форма $f(x, y)$ называется *положительно определенной* или просто *положительной*, если $f(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \neq (0, 0)$. Например, форма $x^2 + y^2$ очевидно является положительной, в то время как форма $x^2 + 2xy + y^2$ не является положительной. Заметим, что последняя форма $f = (x + y)^2$, несмотря на то, что никогда не принимает отрицательных значений, не является положительной, потому что обращается в ноль в точках (x, y) при условии $x = -y$.

По коэффициентам формы $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ можно определить, положительная она или нет. Как это сделать в общем случае n переменных, излагается в университетском курсе алгебры. Но в случае двух переменных можно обойтись и «школьными» средствами. Докажем, что *форма* $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ *– положительная, если* $a > 0$ *и* $ac - b^2 > 0$.

Для доказательства рассмотрим сначала все пары (x, y) с $y = 0$, т.е. пары $(x, 0)$, где $x \neq 0$. Так как $a > 0$, то $f(x, 0) = ax^2 > 0$ для любого $x \neq 0$. Пусть теперь $y \neq 0$. Тогда, обозначив $t = \frac{x}{y}$, имеем

$$f(x, y) = y^2\left(at^2 + 2bt + c\right). \qquad (2)$$

Сомножитель $at^2 + 2bt + c$ в (2) одного знака при всех t, так как этот квадратный трехчлен не имеет корней (в силу того, что дискриминант $b^2 - ac$ отрицателен). Этот трехчлен положителен, поскольку старший коэффициент $a > 0$.

Упражнение. Докажите обратное утверждение: если форма $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + y^2$ положительная, то $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$.

Положительные формы и расстояния

Ключевая идея геометрии положительных квадратичных форм, кратко ПКФ, состоит в том, что значение ПКФ $f(x, y)$ есть квадрат длины вектора $\overrightarrow{OA}$ или, что то же самое, есть квадрат расстояния от начала O до точки A с координатами (x, y).

Рассмотрим для примера две конкретные ПКФ:

$f_1(x, y) = x^2 + y^2$ и

$$f_2(x, y) = x^2 + xy + y^2 .$$

Сумма квадратов $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ есть ПКФ и задает квадрат расстояния $|OA|$ от начала $O = (0, 0)$ до точки $A = (x, y)$ в прямоугольной системе координат. Что касается формы $f_2 = x^2 + xy + y^2$, то ее положительность следует из того, что для ее коэффициентов оба неравенства $a = 1 > 0$ и $ac - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$ выполняются. Хотя это и не очевидно, форма $f_2(x, y)$ также задает расстояние $|OA|$, но только если координаты (x, y) точки A рассматриваются относительно другой, вообще говоря не прямоугольной, системы координат, приспособленной к данной форме.

Произвольная система координат на плоскости задается упорядоченной парой векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, исходящих из одной точки (начала O) и не лежащих на одной прямой (рис.2). Такую пару векторов часто называют *репером*.

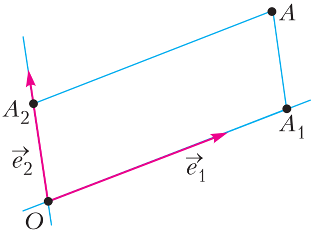


Рис. 2

Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ определяют две прямые Oe_1 и Oe_2. Через точку A на плоскости проведем прямую, которая параллельна второй прямой Oe_2. Она пересекает прямую Oe_1 в некоторой точке A_1. Так как векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\vec{e}_1$ коллинеарны, т.е. лежат на одной прямой, то для них имеем $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \vec{e}_1$, где x – вполне определенное число, называемое *координатой* точки A_1 на прямой. Проведем через A прямую, параллельную первой прямой Oe_1. Она пересекает прямую Oe_2 в точке A_2. Точно так же, как и в первом случае, $\overrightarrow{OA_2} = y \cdot \vec{e}_2$, а число y является координатой точки A_2 на прямой Oe_2. Упорядоченная пара чисел (x, y) и есть *координаты* вектора $\overrightarrow{OA}$ (или координаты его конца – точки A) относительно репера $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Далее, форме $f(x, y) = ax^2 + 2bx + y^2$ сопоставим репер $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ такой, что

$$|\vec{e}_1|^2 = a,\ |\vec{e}_2|^2 = c,\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = b. \quad (3)$$

Напомним, что $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$ означает скалярное произведение двух векторов, т.е. $|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos\angle\vec{e}_1\vec{e}_2$. Таким образом, по форме $f(x, y)$ задается репер, у которого заданы длины его векторов и угол между ними. Тем самым репер задан однозначно с точностью до движения.

В частности, форме $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ соответствует репер, задающий прямоугольную систему координат. А репер, соответствующий форме $f_2(x, y) = x^2 + xy + y^2$, состоит из единичных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ с углом $60°$ между ними, так как $(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) = \cos\angle\vec{e}_1\vec{e}_2 = b = \frac{1}{2}$.

Важно, что в системе координат репера, заданного в (3), квадрат длины отрезка OA равен значению формы $f(x, y)$, где (x, y) – координаты точки A:

$$f(x, y) = |OA|^2. \quad (4)$$

Действительно, мы имеем

$$|OA|^2 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} =$$
$$= (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \cdot (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) =$$
$$= x^2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + 2xy(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + y^2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) =$$
$$= ax^2 + 2bxy + y^2 .$$

При выводе равенства (4) мы воспользовались тремя известными из школьной программы свойствами скалярного произведения векторов: свойствами распределительности, перестановочности и вынесения постоянного множителя.

Решетки

В теории чисел мы имеем дело с решениями уравнений в целых числах. В связи с этим для данного репера рассмотрим на плоскости множество Λ всех точек, обе координаты которых относительно этого репера – целые числа. Это множество называется (произвольной) *решеткой*. Квадратная решетка является частным случаем произвольной решетки.

Итак, по каждой положительной квадратичной форме можно построить репер, по которому, в свою очередь, однозначно строится решетка:

$$f(x, y) \to \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \to \Lambda .$$

Например, для формы $f_1 = x^2 + y^2$ решетка Λ_1 построена на единичном квадрате (см. рис.1). Получающаяся для формы $f_2 = x^2 + xy + y^2$ решетка Λ_2 построена, как иногда говорят, на правильном треугольнике.

Чтобы лучше представить решетку, нужно взять параллелограмм, построенный на векторах репера (рис.3), так называемый

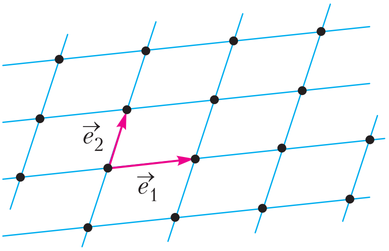


Рис. 3

основной параллелограмм решетки, и рассмотреть разбиение плоскости на основные параллелограммы. Узлы полученной параллелограммной сетки и есть решетка.

Отметим, что соответствие между реперами и решетками однозначно только в одну сторону: каждому реперу соответствует единственная решетка Λ. Обратное неверно: в данной решетке Λ можно выбрать бесконечно много других реперов таких, что построенная на них решетка совпадает с Λ (рис.4). *Основные* параллелограммы, т.е. построенные на реперах данной решетки, как нетрудно видеть,

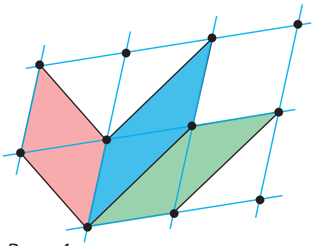


Рис. 4

имеют одинаковую площадь s, причем $s^2 = ac - b^2$. В частности, для квадратной решетки Λ_1 $s = 1$, а для решетки Λ_2, построенной на правильном треугольнике, $s = \sqrt{3}/2$.

Подчеркнем, что теорема Минковского о выпуклой центрально-симметричной фигуре $\mathcal{F}$ справедлива для любой решетки, не только квадратной. При этом нужно только потребовать, чтобы площадь фигуры $s(\mathcal{F}) \geq 4s$, где s – площадь основного параллелограмма данной решетки.

Упаковка плоскости кругами

Для положительной формы $f(x, y)$ определим ее *арифметический* минимум m_f как $\min f(x, y)$ по всем целым $(x, y) \neq \neq (0, 0)$.

Рассмотрим теперь теоретико-числовую задачу: *для данной ПКФ $f(x, y)$ нужно найти ее арифметический минимум m_f и все целые решения уравнения*

$$f(x, y) = m_f . \qquad (5)$$

Переведем эту задачу на геометрический язык. По форме f находим репер (3) и решетку Λ_f. Тогда арифметический минимум m_f равен квадрату расстояния от O до ближайшей точки решетки. Целые решения уравнения (5) – это координаты точек решетки, ближайших к O.

Если в каждую точку решетки Λ_f поместить центр круга, радиус которого равен половине расстояния до ближайшей точки, т.е. $\frac{1}{2}\sqrt{m_f}$, то некоторые соседние круги будут касаться, но никакие круги не будут перекрываться. Системы попарно неперекрывающихся кругов называются *упаковками*. Так как в данном случае центры кругов образуют решетку, такая упаковка называется решетчатой. Причем радиус кругов $r_f = \frac{1}{2}\sqrt{m_f}$ – максимально возможный для данной решетки, так как любое увеличение радиуса ведет к тому, что соседние круги начнут перекрываться.

Какова доля плоскости, покрытой кругами радиуса r_f? Эта доля, или, как говорят, *плотность* δ_f решетчатой упаковки, равна отношению площади круга к площади s_f основного параллелограмма решетки:

$$\delta_f = \frac{\pi r_f^2}{s_f}. \qquad (6)$$

В частности, если центры кругов образуют квадратную решетку Λ_1, то $\delta_1 = \frac{\pi}{4} = 0{,}7853\ldots$ В случае правильной треугольной решетки Λ_2 плотность упаковки больше: $\delta_2 = \pi/(2\sqrt{3}) = 0{,}9068\ldots$

Нетрудно показать при помощи чисто геометрических средств, что среди решетчатых упаковок плоскости кругами плотнейшая упаковка достигается именно на правильной треугольной решетке Λ_2.

Плотнейшие упаковки пространства шарами

Мы подошли к началу дороги, ведущей к одной из центральных задач всей геометрии чисел: как найти самую плотную решетчатую упаковку многомерного пространства равными шарами. Кстати, эта задача, известная для плоскости и пространства еще со времен Древней Греции, является актуальной и для больших размерностей из-за ее связи с задачами кодирования.

Начиная с работы великого К.Ф.Гаусса вплоть до нашего времени плотнейшие решетчатые упаковки были найдены только для размерностей $d \le 8$ и $d = 24$.

К сожалению, методы нахождения плотнейших упаковок в пространствах малых размерностей перестают «работать» для больших размерностей. Интуиция, выработанная в трехмерном пространстве, оказывается бессильной по отношению к этой задаче для пространств больших размерностей. Искренне удивляет, насколько сильно максимальная плотность упаковки пространства шаров убывает в зависимости от размерности пространства. Так, на плоскости максимальная плотность упаковки кругов равна 0,9069… В трехмерном пространстве максимальная плотность упаковки шаров равна 0,7404…, в 8-мерном – 0,2536… В 24-мерном пространстве максимальная плотность упаковки – только 0,0019…! Другими словами, никакая упаковка 24-мерных шаров не может занимать даже 0,2% пространства!

Работа Вороного об упаковках шаров

Вороному удалось создать метод нахождения плотнейшей решетчатой упаковки d-мерного пространства равными шарами для любой размерности.

Для этого Вороной рассмотрел конус ПКФ, состоящий из точек, представляющих положительные квадратичные формы от d переменных. Размерность этого конуса равна числу коэффициентов $\frac{d(d+1)}{2}$ в квадратичной форме.

Среди форм конуса Вороной выделил совершенные формы. Совершенная форма – это ПКФ, имеющая столь много арифметических минимумов, что ее коэффициенты задаются координатами (x, y) этих минимумов однозначно (с точностью до общего множителя).

Например, форма $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ имеет две пары арифметических минимумов $\pm(1, 0)$ и $\pm(0, 1)$ и не является совершенной. Форма $f_2(x, y) = x^2 + xy + y^2$ имеет три пары арифметических минимумов $\pm(1, 0)$, $\pm(0, 1)$ и $\pm(-1, 1)$. По этим трем парам форма $f_2(x, y)$ определяется однозначно (с точностью до общего множителя), т.е. форма $f_2(x, y)$ является совершенной.

Вороной получил для совершенных форм три результата. Во-первых, он доказал, что форма, отвечающая плотнейшей упаковке, является совершенной. Во-вторых, он установил, что совершенных форм от данного числа переменных – конечное число. И самое главное, в-третьих, Вороной предложил метод нахождения всех совершенных форм. Этот метод опирается на так называемый совершенный полиэдр, весьма сложный многомерный многогранник, введенный Вороным. В принципе, найдя методом Вороного все совершенные формы, можно вычислить плотности для конечного числа соответствующих упаковок и выделить те, которые отвечают максимальному значению.

Хотя применение метода Вороного для больших размерностей связано с огромными вычислениями, которые трудно реализовать даже на современных вычислительных машинах, метод Вороного был и остается единственным методом решения этой задачи, который годится для пространств любой размерности.

Параллелоэдры

Последний мемуар Вороного, как было сказано, посвящен теории параллелоэдров. *Параллелоэдр* – это выпуклый многогранник, копиями которого, прикладываемыми друг к другу по целым граням, можно заполнить пространство без пропусков и попарных перекрытий; при этом предполагается, что параллелоэдры не только конгруэнтны, но и параллельны друг другу, т.е. получаются друг из друга параллельными переносами.

В силу параллельности многогранников друг другу и их прилегания по целым граням, каждая грань параллелоэдра имеет равную и параллельную ей противоположную грань. Отсюда и название параллелоэдр, т.е. параллелогранник, которое дал им великий кристаллограф Евграф Степанович Федоров (1857–1919). Федоров начал изучать параллелоэдры в 1885 году из-за их значимости в кристаллографии. Действительно, разбиение пространства на параллелоэдры хорошо моделирует структуру кристалла, которая, как известно, периодическая в трех измерениях.

Двумерный аналог параллелоэдров называют *параллелогоном*. Параллелогон – это выпуклый многоугольник, параллельными копиями которого можно замостить плоскость, прилагая их друг к другу по целым сторонам. Поэтому параллелогон – это многоугольник с четным числом сторон, у которого каждая сторона имеет равную и параллельную пару.

Параллелогон, как легко показать, является центрально-симметричным многоугольником с четырьмя сторонами (т.е. параллелограммом) или с шестью сторонами. Легко видеть, что верно и обратное: любой центрально-симметричный многоугольник одного из этих двух типов (четырехугольник или шестиугольник) является параллелогоном.

Все типы трехмерных параллелоэдров, а их оказалось пять, были найдены Федоровым (рис.5; см. также «Калейдоскоп «Кванта»). На рисунке 5 фигура I – куб, II – шестиугольная призма, III – ромбододекаэдр, IV – вытянутый додекаэдр, V – усеченный октаэдр. На самом деле, точнее было бы говорить здесь не о пяти параллелоэдрах, а о пяти комбинаторных типах параллелоэдров. Как показали российские математики А.Д.Александров (1912–1999) и Б.А.Венков (1900–1964), каждый тип помимо указанного параллелоэдра содержит многогранники, устроенные точно так же, как и указанный представитель, у которых, подчеркнем, все грани центрально-симметричны.

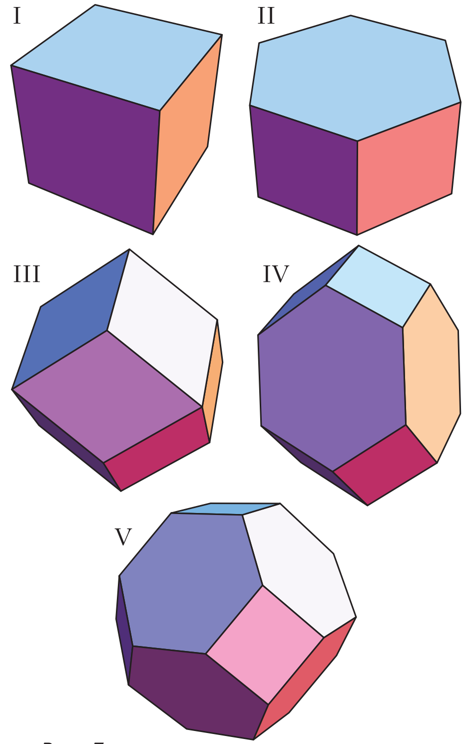


Рис. 5

Это означает, например, что в тип I помимо куба входят также и все параллелепипеды. А в тип II входят все призмы с центрально-симметричными шестиугольными основаниями и боковыми гранями-параллелограммами.

При выводе всех пяти типов параллелоэдров Федоров предполагал, что параллелоэдр – обязательно центрально-симметричный. Несмотря на имевшиеся аргументы в пользу этого предположения, строгого доказательства у Федорова не было. В отличие от двухмерного случая, доказательство центральной симметричности трехмерного параллелоэдра не так просто.

Г.Минковский после работы Федорова о параллелоэдрах заинтересовался этим классом многогранников, причем произвольной размерности. Попытка доказать центральную симметричность параллелоэдра привела Минковского к открытию одной из самых прекрасных теорем в теории выпуклых многогранников – теоремы о существовании и единственности выпуклого многогранника с данными направлениями граней и их площадями. Из этой сложно доказываемой теоремы Минковский легко вывел следующие первые два свойства параллелоэдров, к которым позже было добавлено третье (Б.Н.Делоне):

1) *параллелоэдр – центрально-симметричный многогранник;*

2) *все грани параллелоэдра – центрально-симметричные многоугольники;*

3) *проекция параллелоэдра вдоль любого его ребра на перпендикулярную к нему плоскость есть либо параллелограмм, либо центрально-симметричный шестиугольник.*

Причем все три свойства верны для параллелоэдров любой размерности. Разумеется, для параллелоэдров размерности $d \geq 4$ свойства 2) и 3) должны быть отредактированы. Так, в условии 2) должно быть: «все грани размерности $d-1$ – центрально-симметричные многогранники»; а в условии 3) речь должна идти о проекции параллелоэдра вдоль любой его $(d-2)$-мерной грани на перпендикулярную к ней плоскость.

Значительно позже, в 1954 году, Б.А.Венков доказал, что эти три условия являются не только необходимыми, но и достаточными: любой выпуклый многогранник, удовлетворяющий условиям 1)–3), является параллелоэдром.

Параллелоэдры Вороного

Как устроены параллелоэдры в пространствах произвольной размерности? Как найти все параллелоэдры, точнее все комбинаторные типы параллелоэдров?

Именно этой проблеме был посвящен последний мемуар Вороного. В нем Георгий Феодосьевич построил теорию параллелоэдров особого вида, называемых теперь параллелоэдрами Вороного.

Пусть Λ – произвольная решетка (рис. 6,*а*). *Областью Вороного* данной точки A в решетке Λ называется множество V_A всех точек X плоскости, которые находятся от точки $A \in \Lambda$ не дальше, чем от остальных точек B решетки Λ:

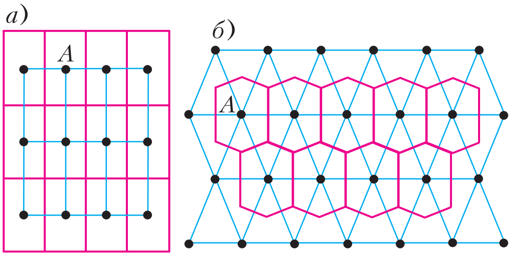


Рис. 6

$$|XA| \leq |XB| \text{ для всех } B \in \Lambda,\ B \neq A.$$

Для того чтобы построить область Вороного, в принципе нужно соединить данную точку A с каждой точкой $B \in \Lambda$ и провести срединный перпендикуляр к отрезку $[AB]$. Срединный перпендикуляр делит плоскость на две полуплоскости. Полуплоскость, содержащая точку A, состоит из тех точек X плоскости, которые расположены к A ближе, чем к B. Та часть плоскости, которая принадлежит всем таким полуплоскостям (пересечение полуплоскостей), и есть область Вороного для точки A.

Согласно определению, область Вороного есть пересечение бесконечного числа полуплоскостей. В действительности же в построении области Вороного участвуют лишь конечное число срединных перпендикуляров, соответствующих относительно близким к A точкам B из Λ. Другими словами, область Вороного V_A есть выпуклый многоугольник, образованный несколькими срединными перпендикулярами. Если построить теперь область Вороного V_B для каждой точки B решетки Λ, то очевидно получим равные и параллельные друг другу многоугольники, которые заполняют плоскость без пропусков и перекрытий (рис.6,*б*).

Таким образом, согласно определению, область Вороного точки для решетки на плоскости есть параллелогон. Совершенно аналогично, для решетки в пространстве область Вороного есть трехмерный многогранник – параллелоэдр, называемый в наше время *параллелоэдром Вороного*.

Надо сказать, что идея области Вороного для дискретных множеств восходит к временам Декарта (1596–1650). В XIX веке концепцию области Вороного в двумерном случае активно использовал знаменитый немецкий математик Дирихле и на протяжении более века эти области назывались областями Дирихле. Но самые глубокие результаты об этих областях, причем для произвольной размерности, были получены Г.Ф.Вороным, и в настоящее время эти области называют в его честь.

Невозможно в рамках статьи описать теорию параллелоэдров, построенную Вороным. Скажем, что она, в частности, содержит метод нахождения всех типов параллелоэдров Вороного для любой размерности. Как соотносится решение этой более узкой задачи к задаче нахождения типов всех параллелоэдров вообще?

Дело в том, что не каждый параллелоэдр является параллелоэдром Вороного. Так, среди параллелограммов только прямоугольники являются областями Вороного (рис.7,*а*). Центрально-симметричный шестиугольник является областью Вороного тогда и только тогда, когда он вписан в окружность (рис.7,*б*). Тем не менее, для

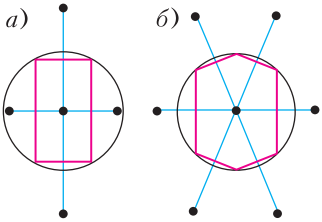


Рис. 7

пространств размерности d = 2, 3 и 4 найдены все типы параллелоэдров. Число типов для этих размерностей равно 2, 5 и 52 соответственно, причем установлено, что каждый из этих типов может быть реализован как область Вороного.

Георгий Феодосьевич предположил, что это верно для параллелоэдров любой размерности d, т.е. любой параллелоэдр размерности d устроен так же, как некоторый параллелоэдр Вороного.

Для тех, кто знаком с понятием аффинного преобразования, уточним смысл гипотезы Вороного: для всякого параллелоэдра существует аффинное преобразование, которое переводит этот параллелоэдр в некоторый параллелоэдр Вороного.

Если гипотеза подтвердится, то метод Вороного, при помощи которого можно перечислить все типы параллелоэдров Вороного, решает также вопрос и о перечислении типов всех параллелоэдров вообще. Если же гипотеза Вороного неверна, то общая проблема описания всех параллелоэдров остается открытой.

Этой гипотезе посвящена значительная часть мемуара Вороного. В частности, в нем Вороной доказал гипотезу для очень важного класса параллелоэдров, так называемых примитивных.

Однако, несмотря на усилия многих математиков, проблема остается нерешенной на протяжении века для всех размерностей $d \geq 5$. Загадочное на первый взгляд упоминание в «Калейдоскопе «Кванта» о «не менее 110244» типах пятимерных параллелоэдров означает, что, с одной стороны, найдены все 110244 типа пятимерных параллелоэдров Вороного. А с другой стороны, всех типов может быть и больше, так как не известно, есть ли еще какие-либо пятимерные параллелоэдры иного строения.

На пути решения проблемы Вороной предложил совершенно замечательную конструкцию – так называемый «подъем диаграммы Вороного на параболоид».

Пусть χ – дискретное множество точек на плоскости (x, y) и нам нужно построить «диаграмму Вороного», т.е. сетку из областей Вороного относительно этих точек. Рассмотрим функцию $z(x, y) = x^2 + y^2$.

Ее графиком будет поверхность – параболоид вращения, который получается вращением параболы вокруг своей оси. «Поднимем» каждую точку X из $\mathcal{X}$ на параболоид. Проведем в каждой «поднятой» точке X' плоскость, касательную к параболоиду. Касательные плоскости вырезают многогранник, описанный около параболоида (рис.8). Вороной заметил, что если спроектировать этот многогранник на плоскость, то проекции граней совпадают с областями Вороного. Тем самым, задача построения диаграммы Вороного для данного множества сводится к построению выпуклого многогранника. Этот подход широко используется в современной вычислительной геометрии и компьютерной графике.

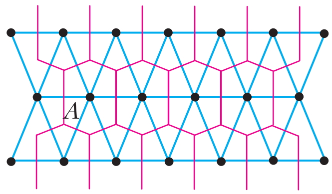


Рис. 9

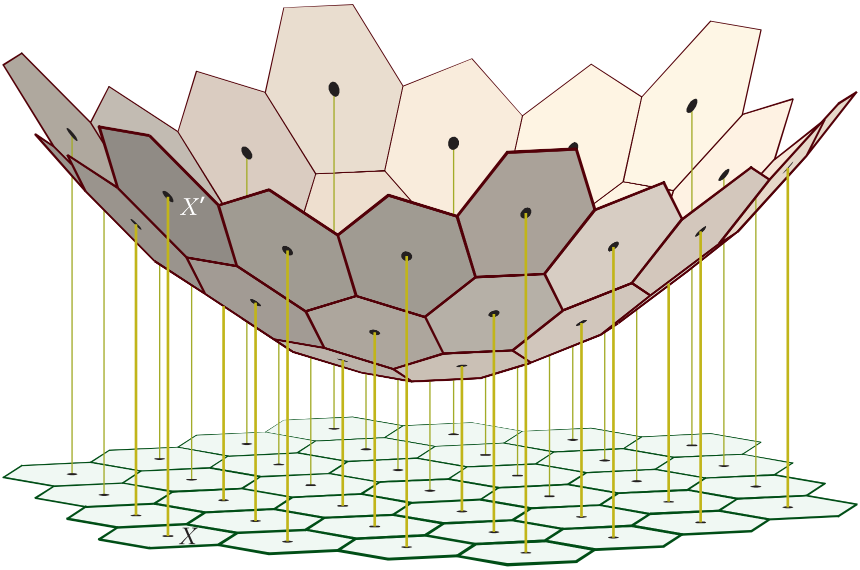


Рис. 8

Рисунок Я.Кучериненко

Заметим, что диаграмма Вороного тесно связана с другой важной сеткой – разбиением Делоне (рис.9). Напомним, что разбиение Делоне плоскости также однозначно задается множеством $\mathcal{X}$ (см. статью «Многогранный Делоне» в «Кванте» №1, 2 за 2010 г.). Между диаграммой Вороного и разбиением Делоне имеется соответствие *дуальности*:

– каждой области Вороного V_A соответствует вершина разбиения Делоне, которая является центром A этой области;

– ребру e диаграммы Вороного, разделяющему области V_A и V_B, соответствует ребро AB в разбиении Делоне;

– вершине v в диаграмме Вороного соответствует ячейка Делоне, вершины которой суть центры областей Вороного, сходящихся в v.

Заключая очерк об одном из самых крупных математиков, когда-либо работавших в теории чисел, подчеркнем, что глубокие идеи Георгия Феодосьевича Вороного не только оказывают влияние на современную теорию чисел, но и играют большую роль во многих науках и приложениях.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача М2543 предлагалась на XXII Кубке памяти А.Н.Колмогорова, задача М2545 – на XIV Международной Жаутыковской олимпиаде.

Задачи М2542–М2545, Ф2549–Ф2552

М2542. Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10. Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из клетки нижней строки перелететь в некоторую клетку верхней строки, а из клетки крайнего правого столбца перелететь в некоторую клетку крайнего левого столбца. Докажите, что кузнечику понадобится не менее 9 перелетов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.

Н.Власова

М2543. В десятичной записи чисел A и B по 2019 цифр. В числе A ровно 12 цифр отличны от нуля: пять самых левых и семь самых правых. В числе B ровно 14 цифр отличны от нуля: пять самых левых и девять самых правых. Докажите, что в десятичной записи наибольшего общего делителя A и B не более 14 цифр.

Л.Самойлов

М2544. Пусть

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

– многочлен степени n, имеющий n корней, лежащих на интервале $(0;1)$. Докажите, что для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$(-1)^k (a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) > 0 .$$

Н.Сафаэи (Иран)

М2545. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC соответственно взяты точки N, K и L так, что $AL = BK$, а CN – биссектриса угла ACB (рис.1). Отрезки

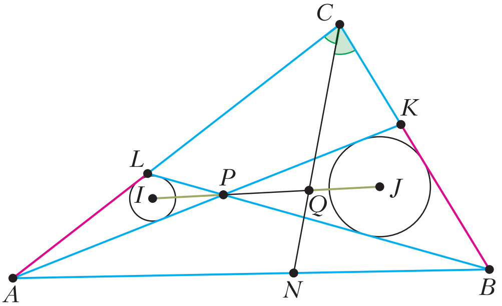


Рис. 1

AK и BL пересекаются в точке P. Обозначим через I и J центры вписанных окружностей треугольников APL и BPK соответственно. Пусть Q – точка пересечения прямых CN и IJ. Докажите, что $IP = JQ$.

М.Кунгожин

Ф2549. Ракета неудачно стартовала с поверхности Луны. Она двигалась с постоянным ускорением $a = 10$ м/с^2 строго вертикально в течение $t = 200$ с, а затем двигатели перестали работать. На какое максимальное расстояние s от поверхности Луны удалится ракета? Радиус Луны $R_{Л} \approx 2{,}5$ тыс.км, ускорение свободного падения вблизи поверхности Луны $g_{Л} \approx 1{,}6$ м/с^2.

Д.Мороз

Ф2550. Не поджатая однородная пружина имеет длину L, которая много больше диаметра D ее витков. Диаметр D, в свою очередь, много больше диаметра проволоки, из которой сделана пружина. Эта пружина имеет жесткость на растяжение (или сжатие) k. Однако растягиваться такая пружина не может, так как внутрь нее помещена нерастяжимая гибкая нить, а вот изгибаться может. Пружину изогнули так, что ее концевые витки соприкоснулись, т.е. пружину свернули в кольцо. Какую работу пришлось совершить для этого?

Н.Год

Ф2551. Коэффициент трения шайбы о плоскую поверхность равен μ. Эту поверхность расположили так, что она образует с горизонталью угол α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = \mu$, и закрепили. Шайбу, масса которой m, толкнули так, что все ее точки приобрели одинаковую начальную скорость v_0, направленную вдоль наклонной поверхности, причем угол φ_0 между направлением начальной скорости и направлением наискорейшего спуска по поверхности такой, что $\cos\varphi_0 = -0{,}5$. В тот момент, когда угол φ_1 между направлением скорости движения шайбы и направлением наискорейшего спуска стал таким, что $\cos\varphi_1 = +0{,}5$, шайба оказалась на том же горизонтальном уровне, что и в момент старта. Какое количество теплоты Q выделилось за счет трения между шайбой и поверхностью к этому моменту? Какова длина L пути, который к этому моменту прошла шайба? Какой будет установившаяся через большое время скорость v движения шайбы?

С.Негурочка

Ф2552. Струя воды с объемным расходом β $\left(\text{м}^3/\text{с}\right)$ падает на плоскую поверхность перпендикулярно ей. Перед соприкосновением с поверхностью вода движется со скоростью v. Уровень воды на поверхности на большом расстоянии от места падения струи равен H. Воду можно считать маловязкой. Как зависит радиус углубления R на поверхности воды от указанных в условии задачи параметров? При каком соотношении между параметрами углубление не возникает? На фотографии

Рис. 2

(рис.2), найденной в интернете (http://staff.civil.uq.edu.au/h.chanson/pictures/eviergrnd.jpg) , приведен пример такого явления.

П.Январский

Решения задач М2530–М2533, Ф2537–Ф2540

М2530. Решение этой задачи см. в статье «Высоты треугольника и обратный ход».

М2531. *Пусть k – натуральное число и $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = 4k$ – все положительные делители числа $4k$. Докажите, что найдется $i \in \{1,\ldots,m\}$ такое, что $d_i - d_{i-1} = 2$.*

Предположим противное – нужного i не нашлось. Тогда если d и $d+2$ – делители числа $4k$, то и $d+1$ – тоже. Заметим, что если a – делитель числа $4k$, причем a не делится на 4, то $2a$ – тоже делитель числа $4k$.

Пользуясь указанными свойствами, начав с пары $(1, 2)$, будем находить у числа $4k$

новые пары делителей вида $(a, a+1)$, для которых a и $a+1$ не кратны 4.

Пусть $(a, a+1)$ – пара делителей числа $4k$, ни один из которых не делится на 4. Тогда числа $2a$ и $2a+2$ – также делители числа $4k$, а значит, и $2a+1$ – делитель. Оба числа $2a$ и $2a+2$ не могут делиться на 4, поэтому в одной из пар $(2a, 2a+1)$, $(2a+1, 2a+2)$ оба числа – делители числа $4k$, не делящиеся на 4.

К новой паре можно применить это рассуждение снова и т.д. Таким образом, начав с пары $(1, 2)$, мы получим пары $(2, 3)$, $(5, 6)$, $(10, 11)$,… При переходе к новой паре сумма чисел в паре увеличивается, поэтому получаем бесконечное множество делителей числа $4k$. Противоречие.

И.Митрофанов

M2532. *Аня и Максим играют в игру на клетчатой доске 100×100. Сначала Аня заполняет клетки доски целыми числами от 1 до 10000 так, что каждое число встречается по одному разу. Затем Максим ставит фишку на одну из клеток самого левого столбца по своему выбору. Далее он за несколько ходов передвигает фишку в самый правый столбец. За один ход он может передвинуть фишку из клетки в любую соседнюю с ней по вершине или стороне. За каждую посещенную клетку (включая изначальную) Максим платит Ане такое число монет, которое написано на этой клетке. Максим хочет заплатить как можно меньше, Аня же хочет получить как можно больше. Сколько монет заплатит Максим, если каждый из них будет действовать наилучшим для себя образом?*

Ответ: 500000.

Пусть Аня заполнит таблицу так, как показано на рисунке. В любом маршруте фишки от левого до правого края доски для каждого целого $1 \le n \le 50$ в столбцах $2n-1$ и $2n$ должны быть две клетки, соседние по стороне или вершине. Нетрудно видеть, что сумма чисел в таких клетках не меньше $200(2n-1)$. Поэтому Максим должен заплатить не менее $200(1+3+5+\ldots+99) = 500000$ монет.

1	200	201	400	…	9800	9801	10000
2	199	202	399	…	9799	9802	9999
3	198	203	398	…	9798	9803	9998
4	197	204	397	…	9797	9804	9997
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
98	103	298	303	…	9703	9898	9903
99	102	299	302	…	9702	9899	9902
100	101	300	301	…	9701	9900	9901

Теперь докажем, что при любой расстановке Максим может выбрать маршрут «стоимостью» не более 500000 монет. Разобьем доску на 50 горизонтальных прямоугольников 2×100. Тогда в каком-то прямоугольнике П сумма расставленных чисел не превосходит $\frac{1+2+\ldots+10000}{50} = 1000100$. Покрасим в каждом из 100 столбцов прямоугольника П ту из двух клеток, в которой находится меньшее число. Пусть маршрут фишки будет проходить по покрашенным клеткам, обозначим за S стоимость такого маршрута. В каждом столбце прямоугольника П число в непокрашенной клетке больше числа в покрашенной клетке хотя бы на 1. Поэтому сумма чисел во всех непокрашенных клетках прямоугольника П не меньше чем $S+100$. Тогда общая сумма чисел в прямоугольнике П не менее $2S+100$ и не более 1000100, откуда $S \le 500000$.

Тем самым, искомый маршрут найден.

А.Меньщиков, Л.Шабанов

M2533*. *Дан тетраэдр. Пусть a и b – длины двух противоположных ребер тетраэдра, а α и β – величины двугранных углов при этих ребрах; c и d – длины ребер в другой паре противоположных ребер, а γ и δ – величины двугранных углов при этих ребрах. Докажите, что $a+b=c+d$ тогда и только тогда, когда $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.*

Первый способ. Сначала – два замечания. I. Центр сферы, касающейся сторон плоского угла, лежит в плоскости, проходящей через биссектрису угла перпендикулярно его плоскости (рис.1).

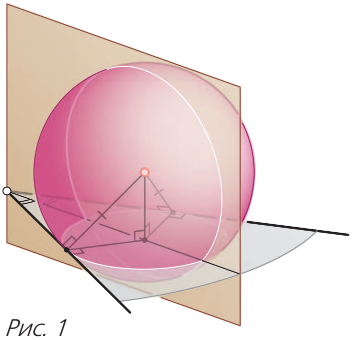


Рис. 1

II. Центр сферы, касающейся ребер k, l, m трехгранного угла (k, l, m – лучи), лежит на таком луче p с началом в вершине угла (рис.2), что плоскости (kp), (lp), (mp)

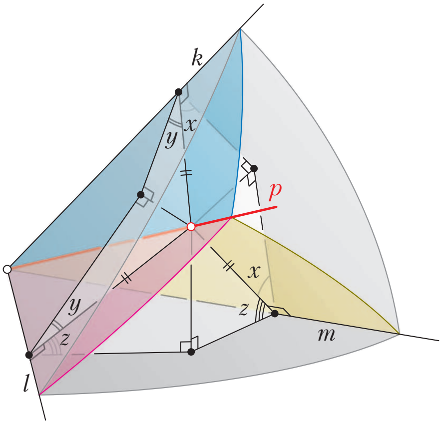


Рис. 2

делят двугранные углы φ, ψ, ω трехгранного угла на части x, y; y, z; z, x ($x+y=\varphi$, $y+z=\psi$, $z+x=\omega$, т.е.

$$x=\frac{\varphi-\psi+\omega}{2},\quad y=\frac{\varphi+\psi-\omega}{2},$$
$$z=\frac{-\varphi+\psi+\omega}{2}).$$

Покажем, что для тетраэдра каждое из утверждений

(1) $$a+b=c+d$$

и

(2) $$\alpha+\beta=\gamma+\delta$$

равносильно следующему:

(3) существует сфера, касающаяся четырех ребер тетраэдра длин a, b, c, d.

Тем самым будет доказано, что условия (1) и (2) эквивалентны. В доказательствах будем использовать следующие обозначения: $ABCD$ – данный тетраэдр; двугранные углы при ребрах $AB=a$, $CD=b$, $BC=c$, $AD=d$, $AC=e$ равны α, β, γ, δ, ε соответственно; P, Q, R, S – точки касания сферы с ребрами AB, BC, CD, AD.

(3) $\Rightarrow$ (1): *если существует сфера, то* $a+b=c+d$. Поскольку отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны (рис.3), то $BP=BQ$, $CQ=CR$, $DR=DS$, $AS=AP$. Значит,

$$a+b=AB+CD=AP+BP+CR+$$
$$+DR=AS+BQ+CQ+DS=$$
$$=AD+BC=c+d.$$

(1) $\Rightarrow$ (3): *если $a+b=c+d$, то существует сфера*. Если $a=c$, то $b=d$. В таком случае треугольники ABC и ADC равнобедренные (рис.4). Если M – середина AC, то плоскость BMD содержит биссектрисы BM и DM углов ABC и ADC и перпендикулярна их плоскостям. Плоские

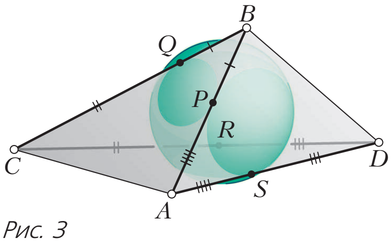


Рис. 3

углы BAD и BCD симметричны относительно плоскости BMD, значит, множества точек, равноудаленных от сторон этих углов, пересекают плоскость BMD по од-

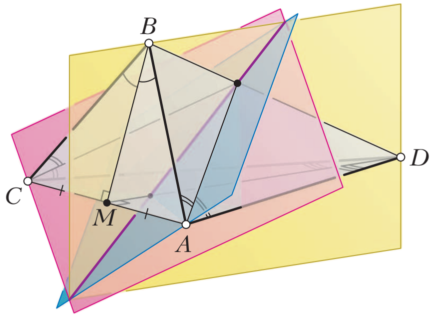


Рис. 4

ной и той же прямой. Любая точка некоторого отрезка этой прямой может быть центром нужной сферы.

Проведем построение для случая $a > c$. Если $a > c$, то $b < d$. На луче BA отложим отрезок $BK = c$, а на луче DA – отрезок $DL = b$ (рис.5). Поскольку $a + b = c + d$,

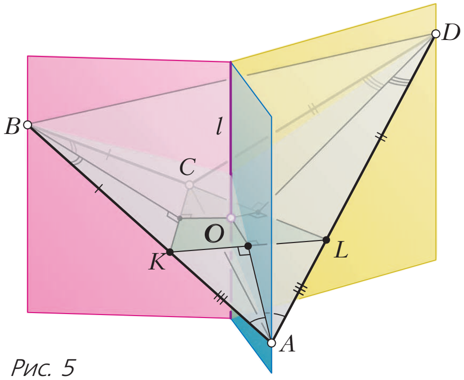


Рис. 5

имеем $AK = a - c = d - b = AL$. Значит, треугольники CBK, KAL, LDC равнобедренные, а плоскости, перпендикулярные плоскостям углов CBA, BAD и ADC и содержащие их биссектрисы, проходят через середины сторон треугольника CKL перпендикулярно этим сторонам. Они пересекаются по прямой l, перпендикулярной плоскости треугольника CKL и проходящей через центр O его описанной окружности. Каждая точка прямой l равноудалена от прямых, содержащих ребра AB, BC, CD, DA тетраэдра.

Выберем произвольную точку P на отрезке BK такую, что $AP < d$. Пусть O' – точка пересечения прямой l и плоскости, проходящей через P перпендикулярно AB. Сфера с центром O' и радиусом $O'P$ касается ребра AB в точке P. Как видно из построения, прямых BC, CD и AD она коснется в таких точках Q, R и S, что $BQ = BP$, $CR = CQ$, $AS = AP$; эти точки окажутся на самих ребрах, а не на их продолжениях (проверьте!).

Случай $a < c$ рассматривается аналогично.

$(3) \Rightarrow (2)$: *если существует сфера, то* $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. Опустим из центра O сферы перпендикуляры OO_1, OO_2, OO_3, OO_4 на грани ABC, BCD, ADC, ABD тетраэдра (рис.6). По теореме о трех перпендикулярах

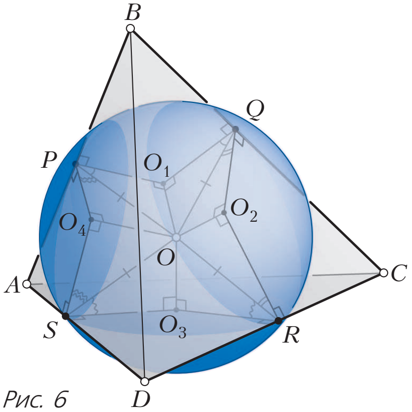


Рис. 6

$O_1P \perp AB$, $O_1Q \perp BC$, $O_2Q \perp BC$, $O_2R \perp CD$, $O_3R \perp CD$, $O_3S \perp AD$, $O_4S \perp AD$, $O_4P \perp AB$; значит,

$$\alpha = \angle OPO_1 + \angle OPO_4,$$

$$\gamma = \angle OQO_2 + OQO_1,$$

$$\beta = \angle ORO_3 + \angle ORO_2,$$

$$\delta = \angle OSO_4 + \angle OSO_3.$$

Из равенств треугольников $\Delta OO_1P = \Delta OO_1Q$, $\Delta OO_2Q = \Delta OO_2R$, $\Delta OO_3R = \Delta OO_3S$, $\Delta OO_4S = \Delta OO_4P$ получаем

$$\alpha + \beta = \angle OPO_1 + \angle OPO_4 + \angle ORO_3 + \angle ORO_2 = \angle OQO_1 + \angle OSO_4 + \angle OSO_3 + \angle OQO_2 = \gamma + \delta.$$

$(2) \Rightarrow (3)$: *если* $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, *то существует сфера*. Рассмотрим луч AT – множество центров сфер, касающихся ребер AB, AC, AD трехгранного угла с вершиной A, и луч CU – множество центров сфер, касающихся ребер CA, CB, CD трехгранного угла с вершиной C (рис.7). Плоскость ATC делит двугранный угол тетраэдра с ребром AC на части $\frac{\varepsilon - \beta + \gamma}{2}$ и $\frac{\varepsilon + \beta - \gamma}{2}$. Плоскость AUC делит его же на части $\frac{\varepsilon + \alpha - \delta}{2}$ и $\frac{\varepsilon - \alpha + \delta}{2}$. Поскольку $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, плоскости ATC и AUC совпадают. Следовательно, лучи AT к CU лежат в одной плоскости и, стало быть, пересекаются в некоторой точке W (поскольку углы TAC и UCA острые как углы в

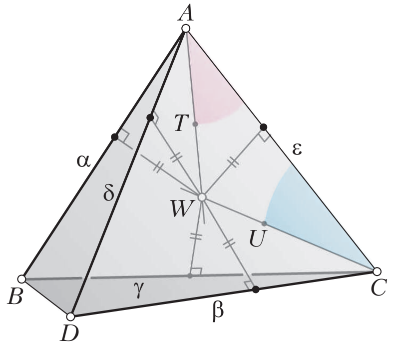


Рис. 7

соответствующих прямоугольных треугольниках), равноудаленной от прямых AB, AD, AC, BC, CD. Проекции точки W на грани ABC и ADC – центры их вписанных окружностей. Следовательно, проекции W на прямые AB, BC, CD, AD совпадают с точками касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC со сторонами, а значит, лежат именно на ребрах тетраэдра, а не на их продолжениях.

Задача полностью решена.

Заметим, что попутно мы доказали следующее утверждение: *если существует сфера, касающаяся всех звеньев замкнутой четырехзвенной ломаной, то существует бесконечно много таких сфер.*

Второй способ. Воспользуемся следующими двумя теоремами (их доказательства можно найти в информационно-поисковой системе «Задачи по геометрии» Р.К.Гордина, см. http://zadachi.mccme.ru, задачи 7999 и 8091).

Теорема синусов для тетраэдра. *Значение* $\dfrac{ab}{\sin\alpha\sin\beta}$ *не зависит от выбора пары противоположных ребер данного тетраэдра.*

Теорема Бретшнейдера для тетраэдра. *Значение* $a^2+b^2+2ab\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$ *не зависит от выбора пары противоположных ребер данного тетраэдра.*

Обозначим

$$a^2+b^2+2ab\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = c^2+d^2+2cd\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\delta = X,$$

$$\frac{ab}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{cd}{\sin\gamma\sin\delta}=Y.$$

Тогда

$$X-2Y\cos(\alpha+\beta) = a^2+b^2+\frac{2ab\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{2ab(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = a^2+b^2+2ab=(a+b)^2.$$

Аналогично, $X-2Y\cos(\gamma+\delta)=(c+d)^2$. Итак, для любого тетраэдра

$$X-2Y\cos(\alpha+\beta)=(a+b)^2,$$

$$X-2Y\cos(\gamma+\delta)=(c+d)^2.$$

Поскольку $Y\neq 0$, из этих равенств видно, что $a+b=c+d$ тогда и только тогда, когда $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.

А.Заславский, Г.Мерзон, М.Панов

Ф2537. *Два одинаковых бруска сцеплены жесткой невесомой штангой и движутся по гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.1). В некоторый момент бруски начинают въезжать на шероховатый*

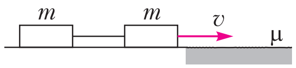


Рис. 1

участок стола. Найдите коэффициент трения μ брусков о шероховатую поверхность, если они в начале движения имели скорость v, а после прохождения шероховатого участка стола движутся со скоростью u. Длина каждого бруска l, штанги s, шероховатого участка стола l + s.

Энергия системы брусков до начала заезда на шероховатый участок стола равна

$$E_1=2\frac{mv^2}{2},$$

а после съезда на гладкую часть стола –

$$E_2=2\frac{mu^2}{2}.$$

Изменение энергии равно

$$\Delta E=A_{тр},$$

где $A_{тр}$ – работа силы трения при движении брусков по шероховатой поверхности. Процесс движения брусков можно разбить на пять этапов: 1) въезд первого бруска на шероховатый участок, 2) движение первого бруска по шероховатой поверхности без второго, 3) въезд второго бруска и съезд первого, 4) движение второго бруска по шероховатой поверхности без первого, 5) съезд второго бруска. График зависимости силы трения от пути, пройденного передней стенкой первого бруска, представлен на рисунке 2. Работа силы трения равна

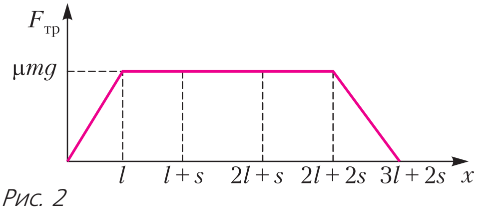


Рис. 2

площади под графиком, взятой со знаком минус:

$$A_{тр} = -2\mu mg(l+s) .$$

В соответствии с законом изменения энергии, получим

$$\mu = \frac{v^2-u^2}{2g(l+s)} .$$

А.Иванов

Ф2538. *Зимой помещение отапливается с помощью нагревателя, который на своей поверхности поддерживает постоянную температуру* $t_1 = 70$ *°C. При температуре воздуха на улице* $t_2 = -30$ *°C установившаяся температура в помещении равна* $t_3 = 10$ *°C. Какая температура воздуха установится в помещении, если в разных углах этого помещения разместить два таких нагревателя? Считайте, что мощность теплопередачи пропорциональна разности температур.*

В установившемся режиме мощность подводимого тепла от одного нагревателя равна мощности тепловых потерь в окружающую среду:

$$\beta(t_1 - t_3) = \gamma(t_3 - t_2) ,$$

где β и γ – коэффициенты пропорциональности. Аналогичное равенство запишем для двух нагревателей:

$$2\beta(t_1 - t_3') = \gamma(t_3' - t_2) ,$$

где t_3' – новая установившаяся температура в помещении. Тогда для t_3' получаем

$$t_3' = \frac{2t_1t_3 - t_2(t_1+t_3)}{t_1 + t_3 - 2t_2} \approx 27{,}1 \text{ °C} .$$

А.Иванов

Ф2539. *На закрепленную непроводящую тонкую жесткую спицу длиной L насажена маленькая бусинка, имеющая массу m и электрический заряд Q. В начальный момент бусинка находится в центре спицы и относительно спицы имеет нулевую скорость. Коэффициент трения между спицей и бусинкой равен* $\mu < 1$ *. Перпендикулярно спице расположена очень длинная (полубесконечная) непроводящая нить, начинающаяся на одном из концов спицы и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда* γ *. Какой будет скорость бусинки в тот момент, когда она покинет спицу?*

Вначале решим вспомогательную задачу. Пусть электрические заряды равномерно распределены по длинному тонкому изолированному стержню AB (рис.1). Пока-

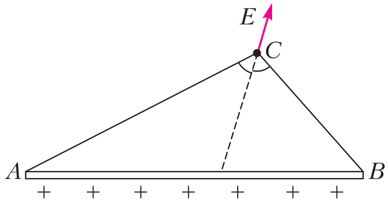


Рис. 1

жем, что в произвольной точке C электрическое поле стержня $\vec{E}$ направлено по биссектрисе угла ACB.

Возьмем на стержне маленький участок MN длиной Δl (рис.2). Его заряд равен $\Delta q = \gamma \Delta l$, где γ – линейная плотность заряда стержня AB. Этот участок создает в точке C – считаем, что $MC \approx NC \approx r$ – напряженность

$$\Delta E = \frac{k\Delta q}{r^2} = \frac{k\gamma\Delta l}{r^2} .$$

Отрезок MN из точки C виден под малым углом

$$\Delta\alpha = \frac{DN}{r} = \frac{MN\cos\alpha}{r} = \frac{MN}{r}\frac{h}{r} = \frac{\Delta l h}{r^2} .$$

Выразив из последней формулы $\dfrac{\Delta l}{r^2}$ и

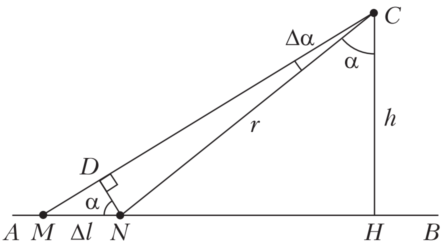


Рис. 2

подставив в формулу для ΔE, получим

$$\Delta E = \frac{k\gamma\Delta\alpha}{h}.$$

Видим, что ΔE пропорционально $\Delta\alpha$. Если мы из точки C проведем биссектрису угла ACB (см. рис.1), то в обе стороны от нее можно выделить одинаковое количество элементарных углов $\Delta\alpha$. Тогда результирующая напряженность электрического поля стержня AB будет равна векторной сумме элементарных напряженностей от участков, видимых под углом $\Delta\alpha$, и будет направлена вдоль биссектрисы угла ACB.

Теперь перейдем к основной задаче. Так как нить полубесконечная, то в каждой точке на спице вектор напряженности электрического поля $\vec{E}_1$, созданного зарядами нити, будет направлен под углом 45° к спице. Мысленно приставим к нашей нити недостающую часть, т.е. сделаем ее бесконечной. Тогда вторая часть нити будет создавать электрическое поле $\vec{E}_2$, тоже направленное под углом 45° к спице (рис.3), а модуль их суммы будет равен

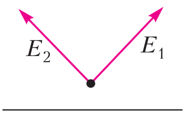


Рис. 3

$$E = \sqrt{2}E_1.$$

С другой стороны, суммарную напряженность поля можно найти с помощью теоремы Гаусса:

$$E = \frac{2k\gamma}{R},$$

где R – расстояние от бусинки до конца спицы, от которого начинается заряженная нить. Таким образом,

$$E_1 = \frac{E}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}k\gamma}{R}.$$

Силу F, действующую на бусинку со стороны электрического поля, созданного зарядами нити, можно разложить на две составляющие: вдоль спицы и перпендикулярно ей. Они одинаковы по величине и равны $\frac{k\gamma Q}{R}$ каждая. Поперечная к спице составляющая этой силы компенсируется нормальной реакцией спицы. Поэтому сумма сил, действующих на бусинку, направлена вдоль спицы и равна по величине $\frac{k\gamma Q}{R}(1-\mu)$. Работа этой силы на пути от середины спицы до ее конца (ее мы найдем интегрированием) приведет к изменению кинетической энергии бусинки:

$$\int\limits_{L/2}^{L} \frac{k\gamma Q}{R}(1-\mu)\,dR = k\gamma Q(1-\mu)\cdot\ln 2 = m\frac{v^2}{2}.$$

Следовательно, скорость бусинки в момент покидания спицы будет равна

$$v = \sqrt{\frac{2k\gamma Q(1-\mu)\cdot\ln 2}{m}}.$$

В.Гребень

Ф2540. *Перпендикулярно оптической оси тонкой собирающей линзы расположена тонкая палочка длиной l. Палочка находится за фокусом линзы на расстоянии d от ее центра. При этом увеличение длины палочки равно Γ_1. Затем палочку располагают вдоль оси линзы так, что ее центр лежит на оси линзы на расстоянии a от нее, причем палочка целиком находится за фокусом линзы. Найдите увеличение Γ_2 длины палочки в этом случае.*

Формула тонкой линзы имеет вид

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Поперечное увеличение линзы равно

$$\Gamma_1 = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F}.$$

Отсюда для фокусного расстояния линзы получим

$$F = \frac{d\Gamma_1}{1+\Gamma_1}.$$

Теперь запишем формулу тонкой линзы для каждого конца палочки при ее продольном расположении:

$$\frac{1}{d+\frac{l}{2}} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d-\frac{l}{2}} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}.$$

Тогда длина изображения палочки будет

$$l' = f_2 - f_1 = \frac{lF^2}{(d-F)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

а искомое продольное увеличение будет

$$\Gamma_2 = \frac{l'}{l} = \frac{\left(\frac{d\Gamma_1}{1+\Gamma_1}\right)^2}{\left(\frac{d}{1+\Gamma_1}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

А.Иванов

Высоты треугольника и обратный ход

П.Кожевников

Как известно, конструкция «остроугольный треугольник и его высоты» (рис.1)

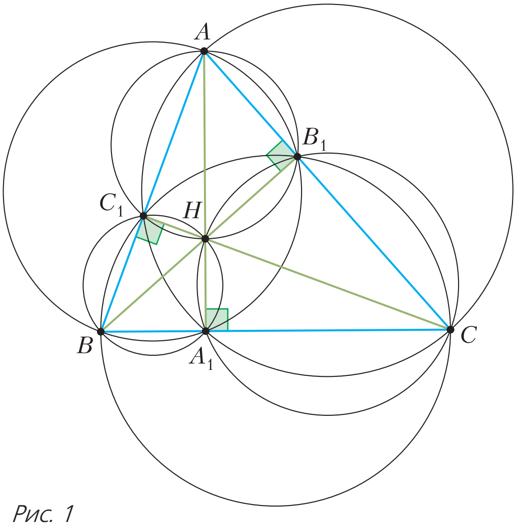


Рис. 1

обладает многими замечательными свойствами. Вспомним некоторые из них. Итак, пусть в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 и H – точка их пересечения.[1] Тогда выполнены следующие свойства.

(1a) Точки B, C, B_1, C_1 лежат на одной окружности.

Аналогичные свойства, конечно, верны для четверок точек C, A, C_1, A_1 и A, B, A_1, B_1. Назовем эти свойства (1b) и (1c) соответственно.

(2a) Точки A, H, B_1, C_1 лежат на одной окружности.[2]

Аналогично, утверждения о четверках B, H, C_1, A_1 и C, H, A_1, B_1 назовем (2b) и (2c).

Упражнение 1. Докажите перечисленные свойства для конструкции «остроугольный треугольник и его высоты».

А теперь «развернем» постановку задачи. Представим себе, что заранее неизвестно, что AA_1, BB_1, CC_1 – высоты. Таким образом, дано лишь то, что ABC – остроугольный треугольник, в котором на сторонах BC, CA, AB взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке H. Интересно установить связи между перечисленными свойствами, а также понять, какие из этих условий достаточно наложить, чтобы точно можно было утверждать, что AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты.

Упражнения

2. Переформулируйте свойства (1a) ((1b), (1c)), (2a) ((2b), (2c)) в терминах различных равенств углов. Например, докажите, что

(1a) $\Leftrightarrow \angle BB_1C = \angle BC_1C$,

(2a) $\Leftrightarrow \angle BC_1C = \angle AB_1H$.

3. Докажите, что условие (2a) эквивалентно следующему: точка, симметричная точке H относительно прямой BC, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

4. Переформулируйте свойства (1a), (2a) в терминах равенств произведений длин отрезков секущих. Например докажите, что

(1a) $\Leftrightarrow HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1$,

(2a) $\Leftrightarrow CA \cdot CB_1 = CC_1 \cdot CH$.

[1] В этой же конструкции A – точка пересечения высот тупоугольного треугольника BCH, т.е. можно сказать, что здесь A, B, C, H – *ортоцентрическая* четверка «равноправных» точек.

[2] Окружности (AHB_1C_1) и (BCB_1C_1) «равноправны» с точки зрения ортоцентрической четверки точек A, B, C, H.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190103

Утверждение. *Выполнение любых двух из шести свойств (1a), (1b), (1c), (2a), (2b), (2c) будет гарантировать, что* AA_1, BB_1, CC_1 *– высоты. (В частности, выполнение любых двух из шести указанных свойств влечет выполнение оставшихся четырех.)*

Доказательство. Доказать утверждение можно разными способами, мы предложим один из них, а читатель может придумать свой путь.

Рассмотрим пару данных свойств. С точностью до переобозначения точек A, B, C имеются следующие 4 принципиально различных случая.[3] А именно,

1 случай: выполнены (1b) и (1c),
2 случай: выполнены (2b) и (2c),
3 случай: выполнены (2b) и (1c),
4 случай: выполнены (1a) и (2a).

Разберем сперва 4 случай (рис.2). Из условия (1a) следует, что $\angle BB_1C = \angle BC_1C$, откуда $\angle AB_1H = \angle AC_1H$. Но из условия (2a) вытекает, что $\angle AB_1H + \angle AC_1H = 180°$, откуда $\angle AB_1H = \angle AC_1H = 90°$, т.е. BB_1 и CC_1 – высоты.

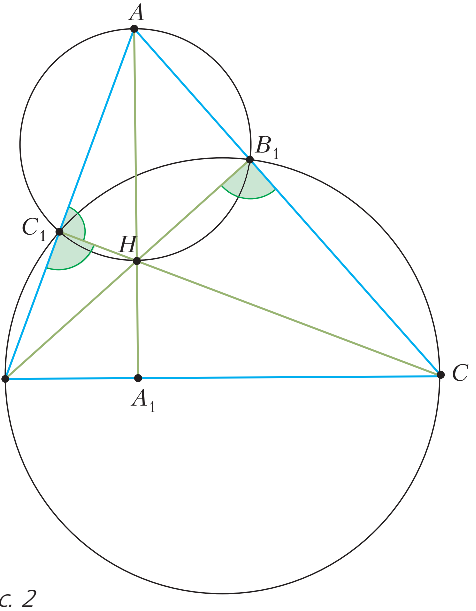


Рис. 2

[3] С точки зрения симметрии обозначений ортоцентрической четверки случаи 1, 2 и 3 аналогичны. В каждом из этих случаев фактически дано, что A_1 – точка Микеля для четверки прямых AB, AC, HB, HC.

Поскольку высоты пересекаются в одной точке, AA_1 – тоже высота.

Сведем каждый из случаев 1, 2, 3 к случаю 4.

Рассмотрим 1 случай (рис.3). Из условий (1b) и (1c) следует, что

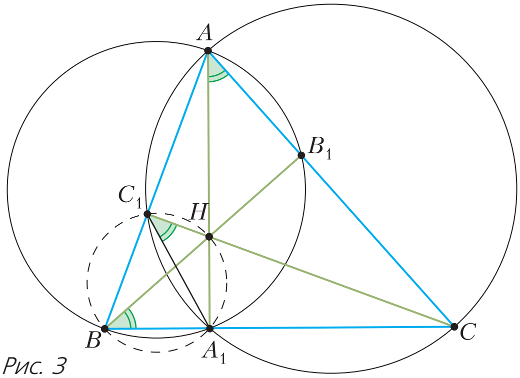


Рис. 3

$\angle A_1C_1C = \angle A_1AC = \angle A_1AB_1 = \angle A_1BB_1$. Полученное равенство $\angle A_1C_1H = \angle A_1BH$ означает, что точки B, A_1, H, C_1 лежат на одной окружности, т.е. выполнено условие (2b). Теперь мы имеем пару условий (1b) и (2b), т.е. случай, аналогичный случаю 4.

Рассмотрим 2 случай (рис.4). Из условий (2b) и (2c) следует, что $\angle A_1B_1C = \angle A_1HC = \angle A_1BC_1$. Полученное равенство

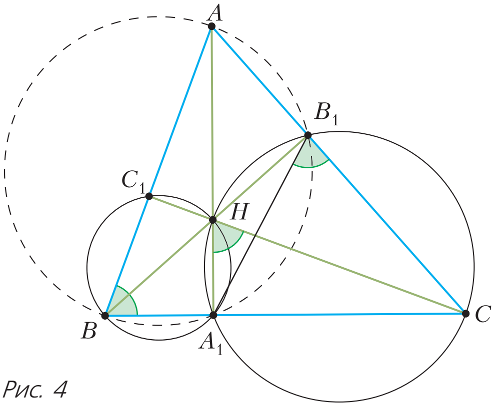


Рис. 4

$\angle A_1B_1C = \angle A_1BA$ означает, что выполнено условие (1c). Теперь мы имеем пару условий (1c) и (2c), т.е. случай, аналогичный случаю 4.

Рассмотрим 3 случай (рис.5). Из условий (2b) и (1c) следует, что $\angle A_1B_1C =$

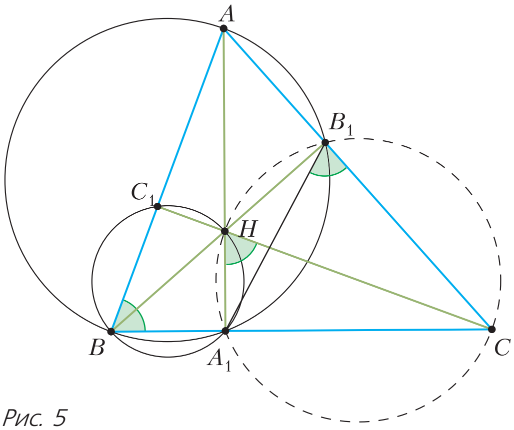


Рис. 5

$= \angle A_1BA = \angle A_1HC$. Полученное равенство $\angle A_1B_1C = \angle A_1HC$ означает, что выполнено условие (2c). Теперь мы имеем пару условий (1c) и (2c), т.е. случай, аналогичный случаю 4.

Наше утверждение доказано.

Упражнения

5. а) Выведите (2a) непосредственно из (2b) и (2c).

б) Тройка условий (2a), (2b), (2c) означает, что $\angle AB_1B = \angle BC_1C = \angle CA_1A = \varphi$. Выведите непосредственно из этих равенств, что AA_1, BB_1, CC_1 – высоты.

Указание. Предположим противное, скажем $\varphi < 90°$. Проведя высоты, докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 не могут пересекаться в одной точке.

6. Выведите из условий (1b) и (1c) условие (1a) (а также из (2b) и (2c) условие (1a)), используя упражнение 4.

Далее рассмотрим соотношение

(3a) $AB \cdot CC_1 = CA \cdot BB_1$

(и аналогичные соотношения (3b) и (3c)).

Оно выполнено, если CC_1 и BB_1 – высоты, поскольку каждое из двух произведений равно удвоенной площади треугольника. Далее, если C_1 – произвольная точка на прямой AB, то удвоенная площадь треугольника ABC равна $2S = AB \cdot CC_1 \cdot \sin\angle CC_1B$. Аналогично, $2S = CA \cdot BB_1 \cdot \sin\angle BB_1C$. Таким образом, условие (3a) эквивалентно равенству $\sin\angle CC_1B = \sin\angle BB_1C$. Это равенство синусов, в свою очередь, означает, что либо углы CC_1B и BB_1C равны, либо они в сумме составляют 180°. Условие $\angle CC_1B = \angle BB_1C$ эквивалентно тому, что точки C, B, C_1, B_1 лежат на одной окружности, т.е. условию (1a). Условие же

$$\angle CC_1B + \angle BB_1C = 180° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \angle AC_1H + \angle AB_1H = 180°$$

эквивалентно условию (2a).

После проведенной работы мы готовы получить короткое решение задачи М2530.

Задача М2530. *В остроугольном треугольнике на сторонах BC, CA, AB взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Известно, что $BC \cdot AA_1 = CA \cdot BB_1 = AB \cdot CC_1$. Докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 – это высоты треугольника.*

Решение. По условию задачи нам даны равенства $BC \cdot AA_1 = CA \cdot BB_1$ и $BC \cdot AA_1 = AB \cdot CC_1$, т.е. условия (3c) и (3b). Из (3c) следует (1c) или (2c); аналогично, из (3b) следует (1b) или (2b). Итого, выполнены два из условий (1b), (2b), (1c), (2c). Остается воспользоваться доказанным утверждением.

В заключение отметим, что в конструкции «остроугольный треугольник и его высоты» (а ведь есть много других не менее интересных сюжетов!) можно рассмотреть другие свойства и вновь ставить «обратную задачу»: выяснять, следует ли из этих свойств, что AA_1, BB_1, CC_1 – высоты. В некоторых случаях такой «обратный ход» приводит к содержательным задачам.

Упражнение 7. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA, AB взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Определим условия:

(4a) $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$, иначе говоря, BC – внешняя биссектриса угла $B_1A_1C_1$;

(5a) $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$, т.е. A_1A – биссектриса угла $B_1A_1C_1$.

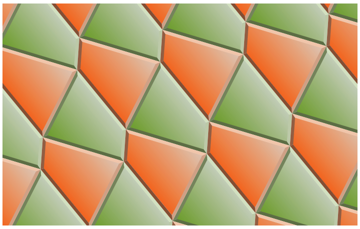
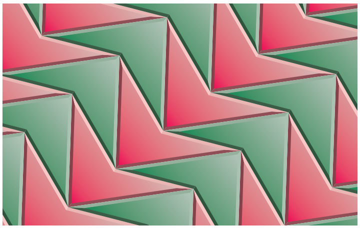
(Аналогично формулируются условия (4b) и (4c), (5b) и (5c).)

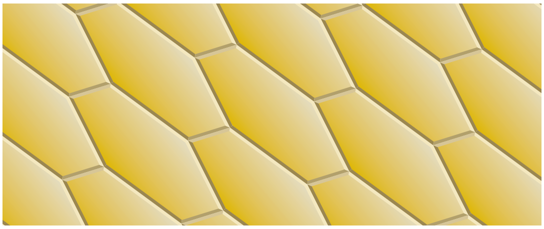
а) Докажите, что если выполнены условия (4a), (4b), (4c), то AA_1, BB_1, CC_1 – это высоты треугольника.

б) (Турнир городов, 2006 г.) Докажите, что если выполнены условия (5a), (5b), (5c), то AA_1, BB_1, CC_1 – это высоты треугольника.

Замощения параллелоэдрами

Несложно показать, что копиями любого треугольника и любого четырехугольника (даже невыпуклого) можно замостить плоскость (см. верхний ряд рисунков). Сложнее показать, что ни одним выпуклым многоугольником с семью и более сторонами нельзя замостить плоскость и что только три семейства выпуклых шестиугольников допускают такое замощение. Самый сложный случай – пятиугольники. К концу XX века было найдено 14 семейств выпуклых пятиугольников, замощающих плоскость, еще одно, 15-е семейство обнаружено в 2015 году (см. «Калейдоскоп «Кванта» №5 за 2017 г.); а доказательства, что это все семейства, до сих пор нет.



Для многих выпуклых многоугольников, которыми можно замостить плоскость, необходимо, чтобы некоторые их копии были повернуты или отражены относительно некоторой прямой. Исключениями являются параллелограммы и центрально-симметричные шестиугольники; ими можно замостить плоскость, используя только параллельные переносы (см. нижний ряд рисунков).

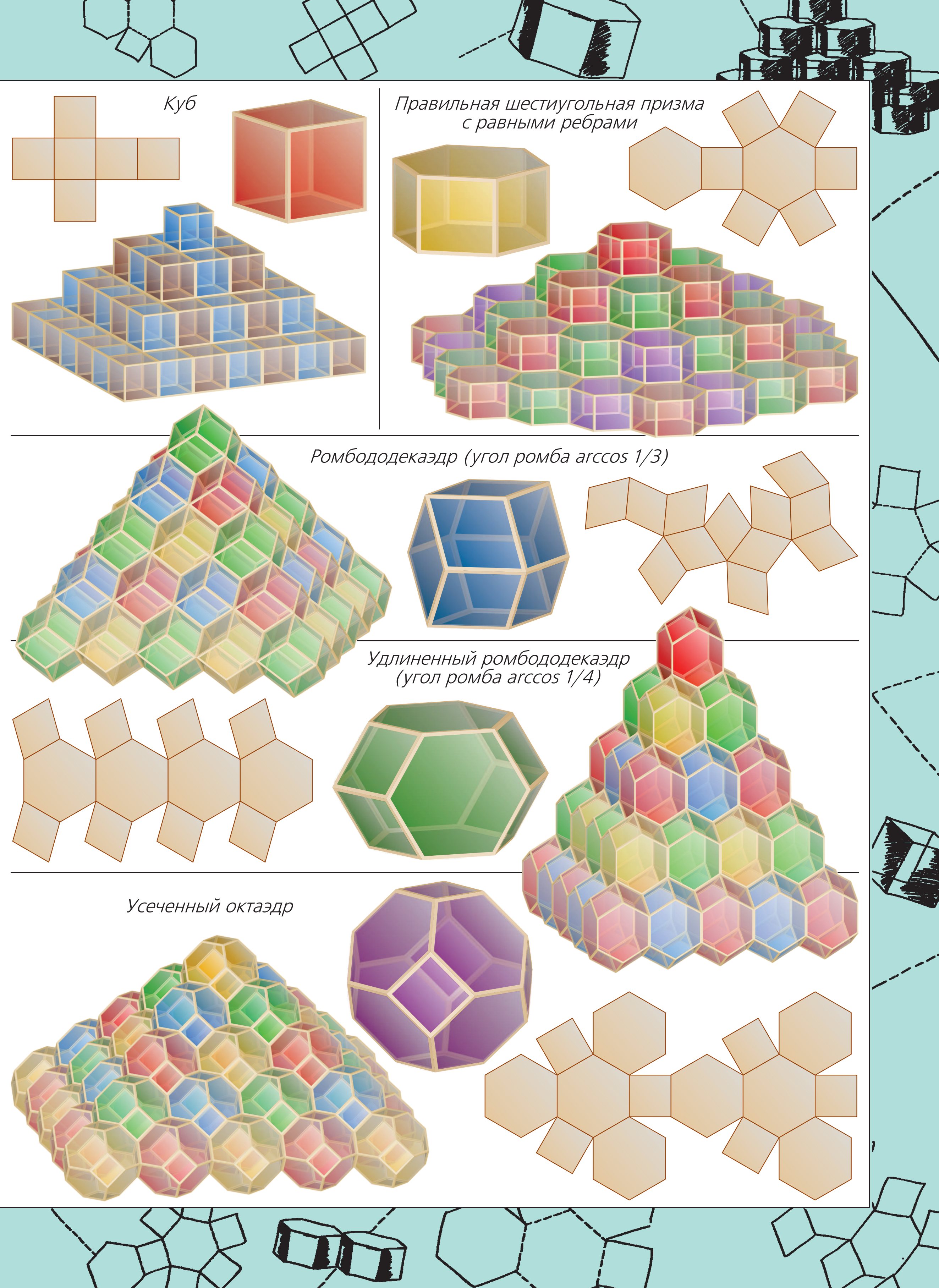
В произвольной размерности выпуклый многогранник, копиями которого можно заполнить все пространство, используя только параллельные переносы, называется *параллелоэдром*. Таким образом, существует всего два семейства двумерных параллелоэдров – параллелограммы и центрально-симметричные шестиугольники. В трехмерном пространстве параллелоэдры были классифицированы Е. Федоровым в 1885 году. Существует пять семейств трехмерных параллелоэдров с разными комбинаторными типами. Наиболее «правильные» представители семейств – куб, правильная шестиугольная призма с равными ребрами, ромбододекаэдр, удлиненный ромбододекаэдр, усеченный октаэдр (см. рисунки справа). Все остальные получаются из них аффинными преобразованиями, а также операциями «удлинения» параллельных ребер.

С ростом размерности число семейств растет очень быстро. Если в четырехмерном пространстве ровно 52 семейства параллелоэдров, то в более высоких размерностях даже точное их количество неизвестно. Известно лишь, что в пятимерном пространстве существует не менее 110 244 различных семейств параллелоэдров, а в шестимерном – не менее полумиллиарда.

Справа изображены также развертки всех пяти трехмерных параллелоэдров. Сможете ли вы собрать соответствующие замощения для каждого из них?

Материал подготовил А. Гарбер

Рисунки М. Панова


Куб
Правильная шестиугольная призма
с равными ребрами
Ромбододекаэдр (угол ромба arccos 1/3)
Удлиненный ромбододекаэдр
(угол ромба arccos 1/4)
Усеченный октаэдр

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

1. В числовом примере АБВ + 9 = ГДЕ буквы А, Б, В, Г, Д и Е обозначают шесть разных цифр. Какая цифра обозначена буквой Д?

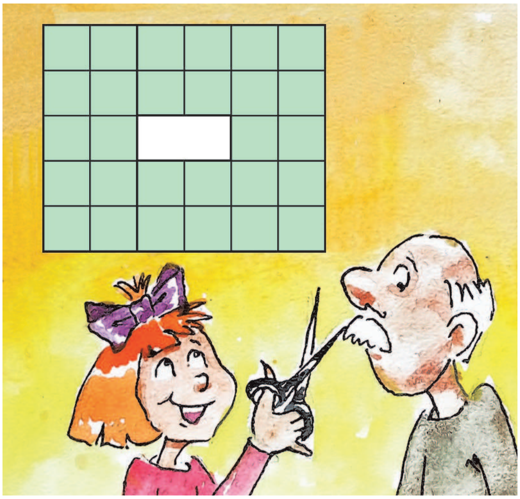
Н.Агаханов

2. Расставьте по кругу 6 ненулевых цифр (не обязательно различных) так, чтобы каждая из них равнялась последней цифре суммы своих соседей.

О.Подлипский

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на муниципальном этапе XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области.



3. Из клетчатого прямоугольника 6×5 вырезали в центре прямоугольник 2×1, как показано на рисунке. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на 6 треугольников?

О.Подлипский

4. Вася выписал на доску 999 произведений: $1\cdot2$, $2\cdot3$, $3\cdot4$, ..., $999\cdot1000$.

Верно ли, что сумма каких-то двух из этих произведений равна 20000?

Н.Агаханов

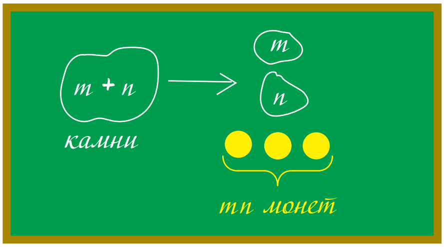
Иллюстрации Д.Гришуковой

Добрыня и куча камней

В.КЛЕПЦЫН

На математическом кружке учитель только что закончил записывать условие задачи:

Есть куча из 1001 камня. Каждый раз, когда богатырь Добрыня делит кучу камней на две, царь платит ему столько монет, каково произведение количеств камней в двух получившихся кучах. Как должен действовать Добрыня, чтобы получить как можно больше?



И сразу ученики заспорили.

– Ясно, что первым делом нужно поделить кучу почти пополам: тогда Добрыня сразу получит аж 500·501 монет. Потом меньшие кучи поделим еще пополам и т.д. А нам нужно будет весь этот заработок сложить. Только вот как? – сказала Женя.

– А кто тебе сказал, что этот путь самый выгодный? Пару раз сорвет куш, а потом будет он у тебя, скажем, десятимонетные кучки пополам делить, по 25 монет за раз получая. А у меня Добрыня по одному камню брать будет. Тысяча монет на первом ходу, 999 на втором, 998 на третьем… Тише едешь – дальше будешь! – ответил ей основательный Мика.

– Это что же, нам сейчас нужно будет все это складывать, чтобы сравнить? – Перспектива вычислять сумму тысячи слагаемых Женю явно не обрадовала.

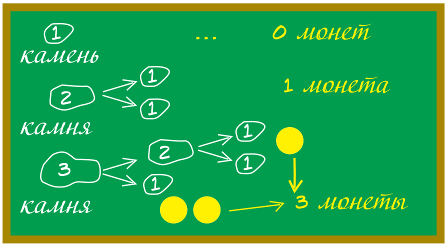
– Не торопитесь, – вмешался учитель. – Вы еще не «вжились» в задачу. Не спешите отвечать именно на заданный вопрос, попробуйте ее «покрутить» и поэкспериментировать, поймите, что происходит.

– Поэкспериментируешь тут, когда каждый раз тысячу чисел складывать надо, – не согласилась Женя.

– Правильно. Поэтому для начала измените задачу. Число 1001 слишком большое, возьмите число поменьше и разберитесь с ним. А там, глядишь, и на исходный вопрос ответите.

– Один – замечательное число! Один камень в куче, делать ничего не надо, красота! Правда, и заработать у Добрыни не выйдет, – откликнулся на это предложение Мика.

– Два камня принесут Добрыне одну монету, тут без вариантов. А если их три, то $2+1=3$ монеты, – подхватила эстафету обрадовавшаяся Женя.



– Пусть теперь камней четыре. Если Добрыня поделит их пополам, а потом кучки опять пополам, как ты предлагаешь, то заработает $2\cdot2+1\cdot1+1\cdot1=4+1+1=6$ монет, – продолжил Мика.

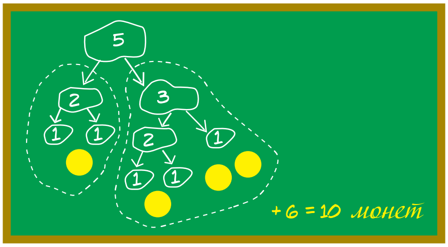
– А если будет оттаскивать по одному камню, как предлагаешь ты, то $3+2+1=$ $=6$. Опять 6 монет! – удивилась Женя.

– А других вариантов нет. Смотрим на 5 камней?

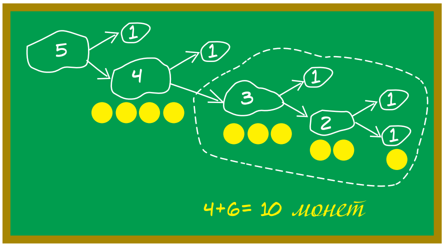
– Смотрим! Если их поделить как $5=$ $=2+3$, то Добрыня заработает $2\cdot3=6$ монет первым ходом, а потом одну монету за кучку из 2 камней и три монеты за кучку

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190104

из трех. Итого 6 + 3 + 1 = 10 монет. А у тебя?

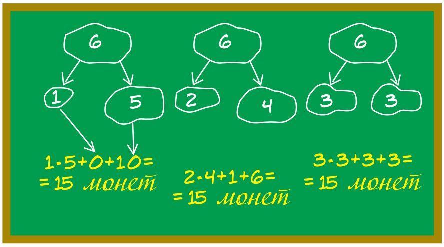


– Берем один камень и сводим задачу к предыдущей. Получается 4 монеты сразу и 6 потом. Итого 4 + 6 = 10. Опять 10! – Настал черед и Мики удивиться.



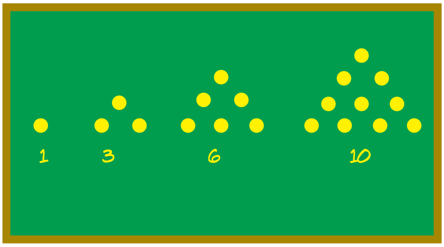
– Опять совпадение… А любое совпадение подозрительно. И должно быть исследовано! – подхватила Женя. – А не может ли так статься, что итоговый результат вообще не зависит от действий Добрыни? Ну, если только он не поленится и разберет все до конца?

– Проверим для 6 камней! – поддержал Мика. – Первым ходом Добрыня может поделить их как 1 + 5, 2 + 4 или 3 + 3. Кучка из 2 камней приносит ему 1 монету, из 3 – три, из 4 – шесть, а из 5 – десять. Посмотрим-посмотрим:



– Таких совпадений не бывает, мы были правы! – обрадовалась Женя. – Осталось это доказать. Где-то я эти числа видела: 1 монета, 3, 6, 10, 15…

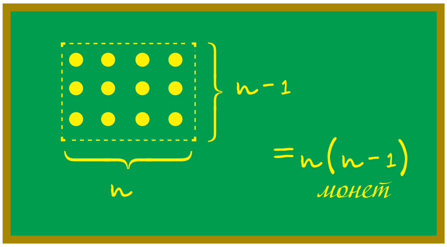
– Да это же треугольные числа: ведь если Добрыня будет работать так, как я сказал, начав с кучки из n камней, он заработает сумму последовательных чисел $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1$.



– Мы готовы сформулировать гипотезу, – обращаясь к учителю, Женя взяла на себя роль капитана. – Итоговый результат не зависит от действий Добрыни: когда куча из n камней будет полностью разобрана, он получит $1+2+\ldots+(n-1)$ монет.

– Отлично! – обрадовался учитель. – Вот вы и разобрались с тем, что в задаче происходит. Остается доказать. Сможете?

– Ну, это уже несложно, – подхватил Мика. – Сначала соберем треугольное число в более аккуратный вид: эта сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Потому что если ее удвоить, то монеты можно выложить в прямоугольник $n(n-1)$:



– А теперь посмотрим, – продолжил он. – Если сначала монет $n = a + b$ и Добрыня делит их на кучки из a и b монет, то первым ходом он заработает ab монет, а потом еще $\frac{a(a-1)}{2}$ из первой и $\frac{b(b-1)}{2}$ из второй кучек. Всего

$$ab+\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}=$$

$$=\frac{2ab+a^2+b^2-a-b}{2}=$$

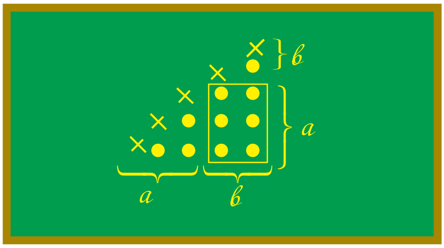
$$=\frac{(a+b)^2-(a+b)}{2}=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

– Ура! – обрадовался Мика.

– Формулы, формулы… А почему все же так хорошо совпало, что от действий Добрыни ничего не зависит? Нет ли этому какого-то хорошего объяснения? – задумалась Женя. – Ведь…

– Совпадения подозрительны! – подхватил Мика. – Может, получится это объяснить как-то геометрически? Ведь треугольное число – это когда складывают монеты треугольником; мы уже их так складывали, вычисляя, чему треугольное число равно.

– Но в таком треугольнике можно найти два меньших, соответствующих двум получающимся кучам из a и b монет! А останется как раз прямоугольник, и будет там как раз ab монет! – обрадовалась Женя.



– Хорошо, это мы упростили рассуждение, обойдясь без формул. И получили красивое доказательство, почему формула работает; но хотели-то мы объяснения, почему результат от действий Добрыни оказался не зависящим, – не спешил радоваться Мика.

– Ты прав. Давай еще подумаем – что мы вообще о треугольных числах знаем? – не теряла энтузиазма Женя.

– Это еще количество пар. В смысле, сколькими способами можно выбрать два из n камней, – ответил Мика.

– Количество пар… Ну конечно! Смотри, количество пар из $a+b$ камней – это количество пар из a камней плюс количество пар из b камней плюс количество пар, в которых один камень из первой кучи, второй из второй. Это тождество мы и написали, – азартно заговорила Женя. – Вот тебе и объяснение! Давай свяжем веревочкой каждую пару камней в исходной куче. И пусть веревочки рвутся, когда камни оказываются в разных кучах. Тогда Добрыня, деля кучу на две, зарабатывает как раз столько монет, сколько веревочек он разорвал. Но в конце, когда у нас n куч по одному камню, все веревочки будут разорваны. Значит, он заработал столько монет, сколько исходно было веревочек. Как бы он ни действовал!

– Молодцы! – подытожил учитель. – Только не забудьте вернуться к исходной задаче и дать на нее ответ.

– Легко! – подхватил Мика. – Заработает Добрыня $500\cdot1001=500500$ монет, как бы он ни действовал, лишь бы не останавливался, пока все кучки не станут по одному камню.

– И еще раз – молодцы! А теперь к следующей задаче…

Послесловие

Автор исходной задачи – А.С.Меркурьев. Она была предложена в 1986 году на Ленинградской математической олимпиаде, а также вошла в «Задачник «Кванта» (М1001). Предлагаем для самостоятельного решения близкие к ней задачи.

1 (И.Изместьев). Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

2 (Е.Горский). На доске написаны по возрастанию два натуральных числа x и y ($x \le y$). Петя записывает на бумажке x^2, а затем заменяет числа на доске числами x и $y-x$, записывая их по возрастанию. С новыми числами на доске он проделывает ту же операцию и т.д., пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на бумажке?

3 (Е.Горский, С.Дориченко). На доске написаны натуральные числа x, y и z. Петя пишет на бумажку произведение двух из них, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он делает ту же операцию и т.д., пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему в этот момент равна сумма чисел на бумажке?

Подсказка к задачам 2 и 3: придумайте геометрическую интерпретацию подсчета.

Рекомендуем для дальнейшего изучения статью Е.Бакаева «Мальчики, девочки, таблицы, графы...» («Квант» №3 за 2015 г.), в которой также обсуждается геометрический подход к подобным комбинаторным задачам. *(Прим. ред.)*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

17. Есть 5 карточек с числами 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из них можно сложить пятизначных чисел, делящихся на 55? (Карточку «6» нельзя переворачивать и использовать как «9».)

П.Кожевников

18. Петя и Вася купили по конструктору «Собери тетраэдр». В конструкторе 4 треугольника – будущие грани тетраэдра. По дороге Петя потерял один треугольник. Заметив это дома, он побежал с остатками своего конструктора к Васе. Сравнивая детали, они обнаружили, что среди четырех Васиных треугольников есть три таких же, как у Пети. «Отлично, теперь я знаю, какой треугольник я потерял!» – воскликнул Петя. «Вот только почему цены конструкторов отличаются?» – задумался он. А могло ли быть так, что у ребят конструкторы отличались одним треугольником, но из каждого конструктора можно было собрать свой тетраэдр?

Л.Емельянов

19. а) Найдутся ли 100 различных натуральных чисел, среднее арифметическое любых нескольких из которых – натуральное? б) А если добавить условие, что любые два числа из этих ста должны быть взаимно просты?

П.Кожевников

20. Дан клетчатый квадрат 100×100. Некоторые его клетки можно закрыть. Будем говорить, что доминошки 1×2 расположены в нем *разрешенным* образом, если каждая занимает ровно две незакрытые клетки и никакие две доминошки не имеют общего отрезка границы (но у доминошек могут быть общие вершины). Какое наименьшее количество клеток можно закрыть, чтобы: а) 2; б) 100 доминошек нельзя было расположить разрешенным образом?

Е.Бакаев

Господин Великий Косинус

А.СТАСЕНКО

Что значит, в сущности, «думать»? Когда ... в воображении всплывают картины-воспоминания, то это еще не значит «думать». Когда эти картины становятся в ряд, каждый член которого пробуждает следующий, то и это еще не есть мышление. Но когда определенная картина встречается во многих таких рядах, то она, в силу своего повторения, начинает служить упорядочивающим элементом.

А.Эйнштейн. Физика и реальность

Как-то один догадливый ученик, торопясь на занятия, заметил, что автомобили у бордюра проезжей части стоят под углом α по отношению к пешеходному переходу (рис.1). «Э, брат, – сообразил

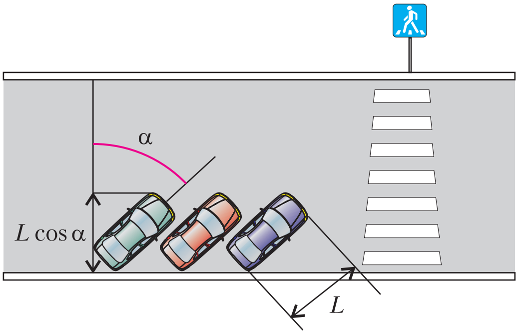


Рис. 1. Автомобили у обочины ставят так, чтобы «косинус альфа» помог проезжать другим

школьник, – это не случайно: проекция продольного габарита автомобиля на пешеходный переход содержит $\cos\alpha$, что при $\alpha > 0$ позволяет сделать проезжую часть шире (чем при $\alpha = 0$)». И тут он вспомнил, где еще встречал Косинус.

Например, что абсолютно упругий шарик массой m, двигавшийся со скоростью v, отскочив от стенки, сообщает ей импульс

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190105

$p = 2mv\cos\alpha$ (рис.2,*а*). Или – что работа силы F на перемещении l равна $A = Fl\cos\alpha$ (рис.2,*б*), откуда ясно, что при $\alpha = 90°$ сила не совершает работы.

А если в электрическом контуре между напряжением U на нагрузке и током I есть сдвиг по фазе α (из-за индуктивности и/или емкости), то на нагрузке выделяется мощность $W = UI\cos\alpha$ (рис.2,*в*).

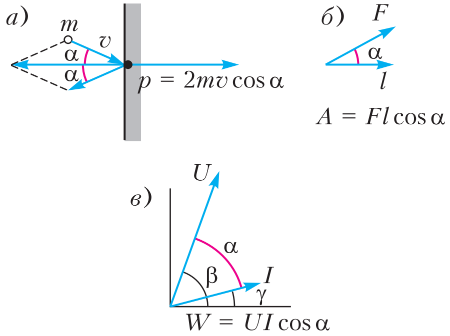


Рис. 2. Еще о «косинусе альфа». а) Импульс, полученный стенкой при абсолютно упругом ударе шарика, уменьшается с ростом угла α (с уменьшением $\cos\alpha$). б) Работа силы на перемещении тем больше, чем больше $\cos\alpha$. в) Фазовая диаграмма электрического контура: β, γ – фазы напряжения и тока на нагрузке, α – сдвиг фаз между ними

А когда Догадливый Ученик едет а трамвае со скоростью v (система координат K_1), а Хулиган на улице (система K_0) светит фонариком под углом α относительно рельсов, то первый из них воспримет свет с частотой

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{1 - \frac{v\cos\alpha}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

где ν_0 – частота света фонарика, c – скорость света.

Среди безработных сил числится и центростремительная сила, действующая, например, на легкий спутник, вращающийся вокруг планеты по окружности, и равная силе притяжения. «Но, подумал Догадливый Ученик, – планеты вокруг Солнца вращаются не обязательно по окружностям». Ведь еще великий Кеплер (1571–1630) установил, что их орбиты – эллипсы, которые относятся к так называемым коническим

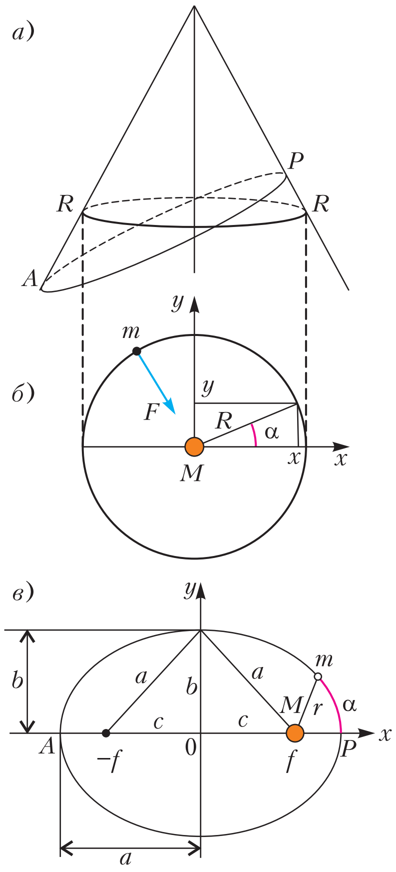


Рис. 3. О конических сечениях. а) Конус, рассеченный плоскостью RR, перпендикулярной его оси, дает окружность радиусом R. Сечение конуса наклонной к его оси плоскостью AP дает эллипс. б) Уравнение окружности – фактически теорема Пифагора для треугольника со сторонами x, y, R; F – сила тяготения (она же центростремительная), действующая на спутник массой m со стороны гравитирующей массы M. в) Эллипс, в фокусе f которого находится центр гравитации массой M

сечениям (рис.3,*а*). Свойства эллипса были известны еще в древности, но прошло пятнадцать столетий, прежде чем человечество отказалось от бесполезных попыток использовать для описания движения планет нагромождения эпициклов Птолемея (II в.).

Все знают, что уравнение окружности радиусом R в декартовых координатах выглядит совсем просто:

$$x^2 + y^2 = R^2, \text{ или } \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1.$$

Фактически это теорема Пифагора: сумма квадратов катетов x и y равна квадрату гипотенузы R (рис.3,*б*).

В отличие от окружности, у эллипса уже два характерных размера – большая и малая полуоси a и b (рис.3,*в*). Поэтому в декартовых координатах уравнение эллипса отличается от уравнения окружности:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Есть и физическое отличие: модуль импульса планеты mv на круговой орбите – постоянная величина, так же, как и момент импульса mvR; а на эллиптической орбите сохраняется только момент импульса, что составляет суть второго закона Кеплера. Конечно, в те времена таких слов в физике не было, поэтому закон был сформулирован как сохранение площади, заметаемой радиусом-вектором планеты в равные промежутки времени.

Начало декартовой системы координат расположено в центре эллипса ($x = 0$, $y = 0$). Но физически важным является его фокус ($x = f$, $y = 0$), в котором расположено массивное гравитирующее тело массой M, например Солнце, вокруг которого и вращаются легкие планеты. Поэтому лучше перейти к другой системе координат, так называемой полярной, в которой положение точечной массы m определяется ее расстоянием r от гравитирующего тела и углом α, отсчитываемым от оси x. Теперь уравнение орбиты планеты запишется в виде

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e\cos\alpha)}.$$

Здесь $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ – эксцентриситет эллипса. Очевидно, что в случае окружности $a = b = R$, $c = 0$, $e = 0$, так что $r = R$. Точка P ($\alpha = 0$, $r = a - c$), ближайшая к центру гравитации, называется перигелием (*пери* – близко, вспомним перископ; *гелий* – солнце), а наиболее удаленная точка A ($\alpha = \pi$, $r = a + c$) называется афелием. (Поскольку r изменяется во времени, сила тяготения перестает быть безработной.)

Тут уместно вспомнить, что для спутников Земли, в том числе для Луны, используется термин *перигей* (Гея – Земля), а для вершины чего-либо достигнутого – *апогей* (например, апогей славы).

Но что мы видим в знаменателе уравнения орбиты планеты, записанного в полярной системе координат? Наш знакомый косинус!

И это еще не все. Почему на экваторе жарко, а на полюсах Земли холодно? Выделим две малые одинаковые площадки у экватора ($\alpha = 0$) и в более высоких широтах

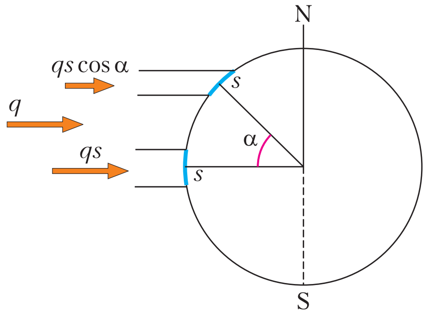


Рис. 4. На одинаковые площадки на поверхности сферы приходятся неодинаковые, в зависимости от $\cos\alpha$, потоки энергии

($\alpha > 0$). Из рисунка 4 видно, что на них попадают разные потоки энергии от светила. И опять-таки: все зависит от косинуса угла между вектором плотности потока энергии $\vec{q}$ $\left(\left[q = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}\right]\right)$ и внутренней нормалью $\vec{n}$ к площадке.

А почему зима и лето сменяют друг друга? Ясно, что это связано с углом φ наклона оси Земли по отношению к нормали к плоскости орбиты (рис.5). В результате на выделенную нами площадку на широте α зимой в полдень придет плотность энергии $q_з \cos(\alpha + \varphi)$, а летом – плотность энергии

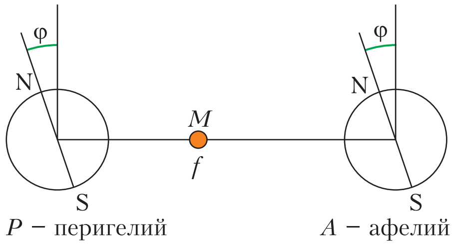


Рис. 5. Вследствие наклона оси Земли к плоскости орбиты (угол φ) зимой (слева) и летом (справа) северное полушарие получает разные потоки энергии от Солнца, расположенного в фокусе f эллиптической орбиты Земли

$q_л \cos(\alpha - \varphi)$ (здесь з – зима, л – лето). Но ведь второй косинус больше первого!

Получается, что зимой у нас холодно из-за наклона оси. А если бы мы при этом были максимально удалены от Солнца, то было бы еще немного холоднее. Но тут Природа слегка порадовала: в это время мы ближе к светилу. И это справедливо: в нашем полушарии и площадь суши и население больше.

Найдем отношение значений максимальной плотности потока энергии Солнца зимой и летом, например, на широте $\alpha = 57°$. Учтем, что $\varphi = 23°$, а эксцентриситет орбиты Земли $e = 0{,}017$. Отношение плотностей потоков энергии в перигелии и афелии обратно пропорционально квадрату расстояний от источника света:

$$\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2 = \left(\frac{1+c/a}{1-c/a}\right)^2 = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 = 1{,}07,$$

а отношение косинусов равно

$$\frac{\cos\alpha_P}{\cos\alpha_A} = \frac{\cos(57° + 23°)}{\cos(57° - 23°)} = \frac{0{,}174}{0{,}83} = 0{,}21.$$

В результате получим

$$\frac{q_P}{q_A} = 0{,}21 \cdot 1{,}07 = 0{,}224.$$

Кстати, Кеплер в 1604 году сформулировал и закон обратно пропорциональной зависимости между освещенностью и квадратом расстояния до источника света, который мы только что использовали.

Итак, слава Великому Косинусу! Ибо от него зависит, в частности, кого мы встретим, выйдя из палатки, – белого медведя среди ледяных торосов или попугая на пальме.

Конечно, теория эллиптических орбит не совсем точна: и масса Солнца не бесконечно велика, и планеты влияют друг на друга. Но чтобы во всем этом разобраться, надо поступить в МГУ или на ФИЗТЕХ, чего вам и желаем.

Законы отражения и преломления света

А.ЧЕРНОУЦАН

При падении луча света на зеркальную поверхность происходит его отражение, т.е. возникает отраженный луч. Плоскость, проходящую через падающий луч и нормаль к поверхности в точке его падения, называют *плоскостью падения*, угол между падающим лучом и нормалью – *углом падения*, а угол между нормалью и отраженным лучом – *углом отражения*. *Закон отражения* утверждает, что а) отраженный луч лежит в плоскости падения и б) угол отражения γ равен углу падения α (рис.1).

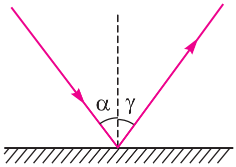


Рис. 1

Лучи, отраженные от плоского зеркала, образуют *мнимое изображение* любого точечного источника, расположенное по другую сторону зеркала (в Зазеркалье) симметрично источнику (рис.2,*а*). Изображение формируется всеми отраженными лучами, а не узким пучком (в отличие от сферического зеркала, преломляющей поверхности, линзы).

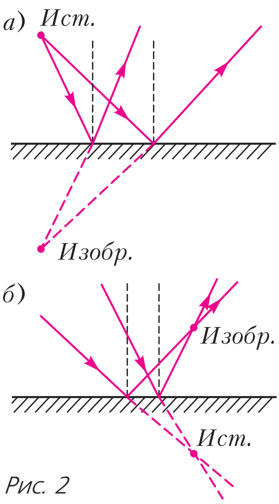


Рис. 2

Вопрос. Может ли плоское зеркало сформировать действительное изображение?

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190106

Ответ. Да, может, если на зеркало падает сходящийся пучок лучей (рис.2,*б*), идущих не непосредственно от источника, а после прохождения ими собирающей линзы. Падающие лучи образуют для зеркала *мнимый источник*, изображение которого будет действительным.

Если падение света происходит из среды с показателем преломления n_1 на границу со средой, имеющей показатель преломления n_2, то образуются два луча: отраженный, возвращающийся в первую среду, и преломленный, распространяющийся во второй среде (рис.3). Отраженный луч подчиняется закону отражения: $\gamma = \alpha_1$. *Закон преломления* утверждает, что а) преломленный луч также лежит в плоскости падения и б) угол преломления α_2 (угол между преломленным лучом и нормалью) может быть найден из закона Снеллиуса

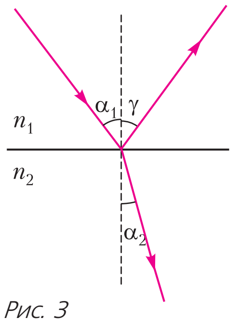


Рис. 3

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Отметим, что при использовании *относительного показателя преломления*, равного отношению большего показателя преломления к меньшему, переход из оптически менее плотной среды в оптически более плотную ($n_1 < n_2$) эквивалентен переходу из вакуума ($n = 1$) в среду с относительным показателем преломления $n = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$:

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{1}{n},$$

а переход из оптически более плотной среды в оптически менее плотную ($n_1 > n_2$) – выходу луча из среды с относительным показателем преломления $n = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}$ в вакуум:

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = n.$$

Задачи на законы отражения и преломления, выбранные нами для разбора, можно условно разделить на три группы: задачи на определение хода лучей с использованием геометрии и тригонометрии, задачи на предельный угол полного отражения и задачи на нахождение изображений.

Начнем с задач на закон отражения.

Задача 1. *Под каким углом (в градусах) к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы осветить дно вертикального колодца отраженными от зеркала солнечными лучами, падающими под углом $\alpha = 30°$ к горизонту?*

Решение. Чтобы найти расположение зеркала, удобно начать с построения нормали. Угол между падающими и отраженными лучами равен $90° + \alpha$, а нормаль проходит по биссектрисе этого угла. Следовательно, угол между нормалью и вертикалью равен $45° + \alpha/2 = 60°$. Такой же угол будет между зеркалом и горизонталью (угол получается из предыдущего поворотом на $90°$).

Задача 2. *При повороте плоского зеркала на некоторый угол вокруг оси, проходящей через точку падения луча перпендикулярно плоскости, в которой лежат падающий и отраженный лучи, угол между падающим и отраженным лучами увеличился на $40°$. На какой угол (в градусах) было повернуто зеркало?*

Решение. Здесь опять удобно отталкиваться от направления нормали. Если зеркало повернулось на угол α, то нормаль также повернулась на угол α. Так как падающий луч не меняет своего расположения, то угол падения изменится на $\pm\alpha$. На столько же изменится и угол отражения. Значит, угол между падающим и отраженным лучами изменился на $\beta = \pm 2\alpha$. По условию $\beta = 40°$ (на столько повернулся отраженный луч). Следовательно, $\alpha = 20°$.

Задача 3. *Человек стоит перед плоским зеркалом, укрепленным на вертикальной стене. Какова должна быть минимальная высота (в см) зеркала, чтобы человек мог видеть себя в полный рост? Рост человека 180 см.*

Решение. Человек должен видеть свою верхнюю точку и свою нижнюю точку. На рисунке 4,*а* человек упрощенно представлен вертикальным отрезком с глазом. Луч, идущий от верхней точки человека и попадающий в глаз, должен отразиться от зеркала в точке A, лежащей посередине между верхней точкой и глазом. Аналогично, луч, идущий от нижней точки человека и попадающий в глаз, должен отразиться в точке B,

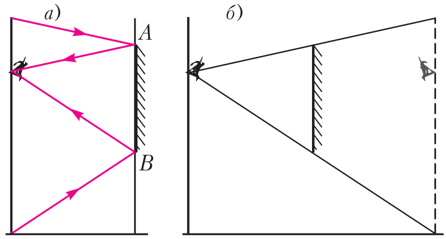


Рис. 4

лежащей посередине между нижней точкой и глазом. Чтобы человек видел себя целиком, зеркало должно простираться от A до B, т.е. иметь вертикальную длину, равную половине роста человека. Значит, минимальная высота зеркала 90 см.

Этот результат становится еще более наглядным, если использовать понятие изображения. Глаз человека должен видеть через зеркало изображение человека, расположенное за зеркалом симметрично человеку (рис.4,*б*). Из построения видно, что вертикальный размер зеркального «окошка» для разглядывания изображения должен быть равен половине роста человека.

Задача 4. *Два плоских зеркала располагаются под углом друг к другу и между ними помещается точечный источник света. Расстояние от этого источника до одного зеркала $l_1 = 3$ см, до другого $l_2 = 8$ см. Расстояние между первыми изображениями в зеркалах $L = 14$ см. Найдите угол α (в градусах) между зеркалами.*

Решение. Строим изображение в каждом зеркале (рис.5). Треугольник, образованный источником и двумя изображениями, имеет стороны $2l_1$, $2l_2$ и L. Найдем угол β из теоремы косинусов:

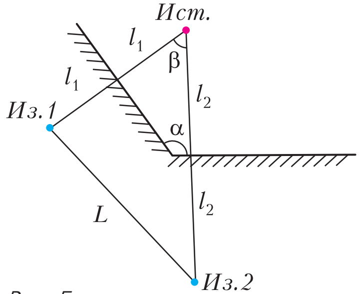


Рис. 5

$$L^2 = (2l_1)^2 + (2l_2)^2 - 2(2l_1)(2l_2)\cos\beta ,$$

откуда

$$\cos\beta = 0{,}5 , \quad \beta = 60° .$$

Для угла между зеркалами получаем

$$\alpha = 180° - \beta = 120°.$$

Теперь – несколько задач на закон преломления.

Задача 5 (ЕГЭ). *На рисунке 6 дан ход луча, полученный при исследовании прохождения луча через плоскопараллельную пластину. Чему равен показатель преломления материала пластины n на основе этих данных?*

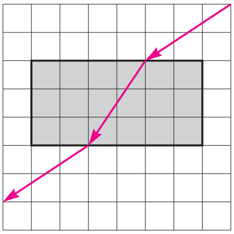


Рис. 6

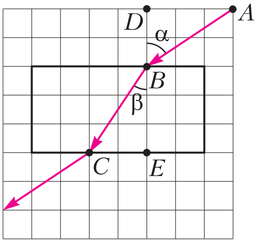


Рис. 7

Решение. Запишем закон преломления (рис.7):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Выразим синусы углов из рисунка:

$$\sin\alpha = \frac{AD}{AB},\ \sin\beta = \frac{CE}{BC}.$$

Из рисунка видно, что $AB = BC$. Следовательно,

$$n = \frac{AD}{CE} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Задача 6. *Солнце составляет с горизонтом угол δ, синус которого 0,6. Шест высотой H = 170 см вбит в дно водоема глубиной $h = 80$ см. Найдите длину L тени от этого шеста на дне водоема, если показатель преломления воды $n = 4/3$.*

Решение. Угол падения лучей $\alpha = 90° - \delta$ (рис.8). При этом $\cos\alpha = \sin\delta = 0{,}6$, $\sin\alpha = 0{,}8$. Угол преломления β найдем из закона преломления:

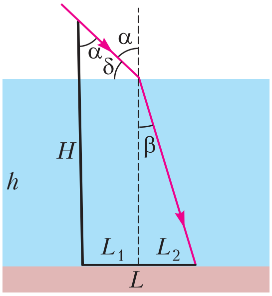


Рис. 8

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}6,\quad \cos\beta = 0{,}8.$$

Теперь можно вычислить длину тени, которая определяется ходом луча, касающегося верхней точки шеста:

$$L = L_1 + L_2 = (H - h)\operatorname{tg}\alpha + h\operatorname{tg}\beta = 180 \text{ см}.$$

Задача 7. *Луч света падает на прозрачную пластинку толщиной d = 2 см под углом α, синус которого 0,8. На сколько миллиметров сместится луч при прохождении пластинки? Показатель преломления вещества пластинки $n = 4/3$.*

Решение. После выхода из пластинки в точке B (рис.9) луч пойдет параллельно

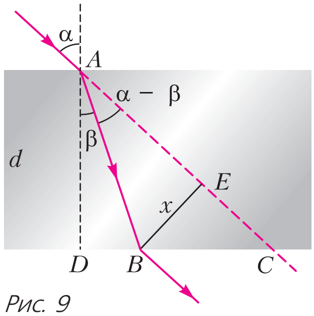


Рис. 9

своему начальному направлению. Смещением луча естественно считать расстояние x между линией падающего луча и линией прошедшего луча. Угол преломления найдем из закона преломления:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}6.$$

Расстояние x между лучами можно найти из треугольника ABE:

$$x = AB\sin(\alpha - \beta).$$

Но $AB = d/\cos\beta$, следовательно,

$$x = \frac{d\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} = \frac{d(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)}{\cos\beta} = 7 \text{ мм}.$$

К такому же результату можно прийти через треугольник BCE:

$$x = BC\cos\alpha,$$

где $BC = CD - BD = d\operatorname{tg}\alpha - d\operatorname{tg}\beta$.

Особое место в теме «преломление света» занимают задачи на использование *предель-*

ного угла. Обычно его называют предельным углом полного (внутреннего) отражения. Явление полного отражения может наблюдаться для лучей, падающих из среды с бóльшим показателем преломления на границу со средой с меньшим показателем. Однако предельный угол возникает и для обратного хода лучей (рис.10). В этом

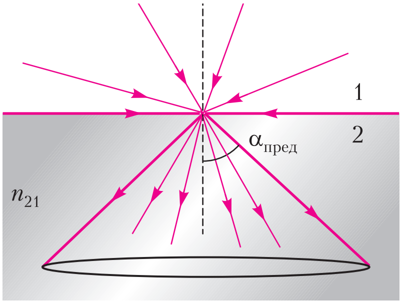


Рис. 10

случае

$$\sin\alpha_2 = \frac{\sin\alpha_1}{n_{21}}.$$

Любому падающему лучу соответствует преломленный луч, причем $0 \le \alpha_2 \le \alpha_{\text{пред}}$, где

$$\sin\alpha_{\text{пред}} = \frac{1}{n_{21}},$$

т.е. все вошедшие во вторую среду лучи лежат внутри конуса с углом полураствора $\alpha_{\text{пред}}$.

При падении световых лучей из среды 2 на границу со средой 1 (рис.11)

$$\sin\alpha_1 = n_{21}\sin\alpha_2 .$$

Преломленный луч существует только при

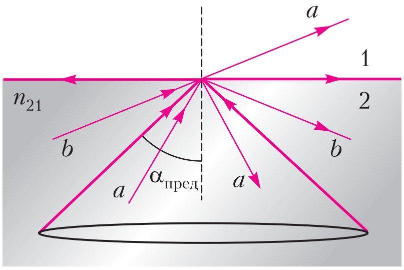


Рис. 11

$\sin\alpha_2 \le 1/n_{21}$, т.е. при $\alpha_2 \le \alpha_{\text{пред}}$ (луч a разделяется на отраженный и преломленный). При $\alpha_2 > \alpha_{\text{пред}}$ происходит полное отражение, как от зеркала (для луча b существует только отраженный луч).

Задача 8. *На дне сосуда с жидкостью с показателем преломления $n = 5/3$ помещен точечный источник света. Какого минимального радиуса R (в см) должен быть непрозрачный диск, плавающий на поверхности жидкости, чтобы, глядя сверху, нельзя было увидеть этот источник? Высота слоя жидкости $h = 12$ см.*

Решение. Ясно, что для диска минимального размера его центр должен располагаться над источником (рис.12). Диск должен преградить путь лучам, падающим под углами, меньшими $\alpha_{\text{пред}}$. Лучи, падающие под бóльшими углами, полностью отразятся. Получаем

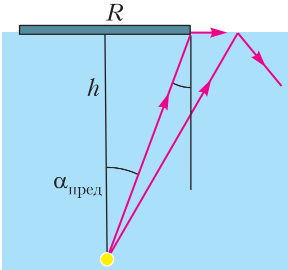


Рис. 12

$$R = h\,\mathrm{tg}\,\alpha_{\text{пред}},$$

$$\text{где}\ \sin\alpha_{\text{пред}} = \frac{1}{n} = 0,6, \quad \cos\alpha_{\text{пред}} = 0,8.$$

Таким образом, $R = 9$ см.

Задача 9. *В стекле с показателем преломления $n_1 = 1,5$ имеется сферическая полость радиусом $R = 9$ см, заполненная водой с показателем преломления $n_2 = 4/3$. На полость падают параллельные лучи света. Определите радиус (в см) светового пучка, который проникает в полость.*

Решение. Угол падения на сферическую поверхность раздела – это угол между падающим лучом и продолжением радиуса, проведенного в точку падения (рис.13). Если угол падения больше $\alpha_{\text{пред}}$, то луч не проникает в полость, происходит полное отражение. Луч, падающий на поверхность раздела под углом $\alpha_{\text{пред}}$, проходит от оси пучка на расстоянии

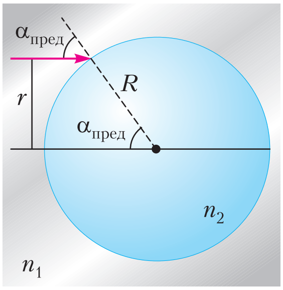


Рис. 13

$$r = R\sin\alpha_{\text{пред}} = \frac{R}{n_{12}} = \frac{R}{n_1/n_2} = 8\ \text{см}.$$

Задача 10. *На плоскую поверхность полушара радиусом $R = 10$ см, изготовленного из прозрачного материала с показателем преломления $n = 1{,}35$, падает луч параллельно оси полушара. При каком минимальном расстоянии от луча до центра полушара он выйдет наружу строго в обратном направлении без потери интенсивности?*

Решение. Во-первых, заметим, что луч все время, вплоть до выхода наружу, остается в плоскости, проведенной через падающий луч и центр полушара. Во-вторых, если луч испытал N отражений от выпуклой поверхности полушара и вышел наружу параллельно начальному направлению, то его траектория внутри полушара представляет собой половину правильного $2N$-угольника (рис.14; здесь $N = 3$). Это становится очевидным, если мысленно представить, что после выхода он попадает в другой такой же полушар. В этом втором полушаре он проделывает такой же путь и возвращается к первому полушару в начальной точке входа. Вместе две траектории образуют правильный $2N$-угольник.

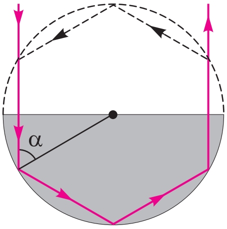


Рис. 14

Расстояние от центра до точки входа равно высоте правильного $2N$-угольника, вписанного в окружность: $h = R\sin\alpha_N$, где α_N – угол падения луча на сферическую поверхность, равный

$$\alpha_N = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2N}.$$

Угол падения возрастает с ростом N. Надо найти минимальное N, при котором лучи испытывают полное отражение. При заданном N полное отражение происходит при $\alpha_N > \alpha_{\text{пред}}$, т.е.

$$n > n_N = \frac{1}{\sin\alpha_N}.$$

Для двух отражений

$$n_2 = \frac{1}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{2} = 1{,}41,$$

для трех отражений

$$n_3 = \frac{1}{\sin(\pi/3)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}15$$

и т.д. В нашем случае показатель преломления меньше n_2, но больше n_3. Значит, минимальное расстояние соответствует трем полным отражениям и равно

$$h = R\sin\alpha_3 = R\sin\frac{\pi}{3} = 8{,}7 \text{ см}.$$

Задача 11. *Широкий непрозрачный сосуд доверху наполнен жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}25$. Поверхность жидкости закрыли тонкой непрозрачной пластиной, в которой имеется отверстие радиусом $R = 2$ см. Определите диаметр d (в см) светлого пятна на дне сосуда, если он освещается рассеянным светом облачного неба, идущим со всех направлений. Толщина слоя жидкости $h = 6$ см.*

Решение. Из каждой точки отверстия внутрь жидкости распространяется конус лучей с углом полураствора $\alpha_{\text{пред}}$ (рис.15).

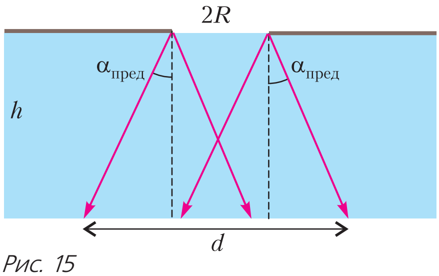


Рис. 15

Края пятна на дне определяются лучами от краев отверстия. Получаем

$$d = 2R + 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha_{\text{пред}},$$

$$\text{где } \sin\alpha_{\text{пред}} = \frac{1}{n} = 0{,}8, \quad \cos\alpha_{\text{пред}} = 0{,}6.$$

Окончательно, $d = 20$ см.

Задача 12 (ЕГЭ). *На поверхности воды плавает надувной плот шириной $l_1 = 4$ м и длиной $l_2 = 6$ м. Небо затянуто сплошным облачным покровом, полностью рассеивающим солнечный свет. Определите глубину тени под плотом. Глубиной погружения плота и рассеиванием света водой пренебречь. Показатель преломления воды относительно воздуха принять равным $n = 4/3$.*

Решение. От каждой точки свободной поверхности воды вниз идет конус света с углом полураствора $\alpha_{\text{пред}}$. Под препятствием шириной l_1 максимальная глубина тени

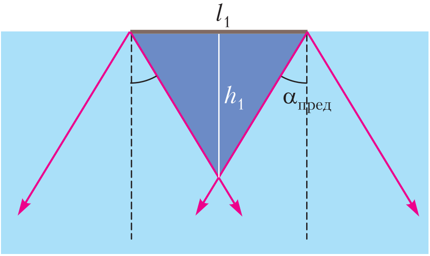


Рис. 16

равна (рис.16)

$$h_1 = \frac{l_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha_{пред},$$

а под препятствием шириной l_2 –

$$h_2 = \frac{l_2}{2}\operatorname{ctg}\alpha_{пред}.$$

Не освещенными ни с одной стороны (полная тень) будут точки на максимальной глубине h_1. (Область полной тени имеет форму перевернутой четырехскатной крыши, конек которой находится на глубине h_1.) Для предельного угла имеем

$$\sin\alpha_{пред} = \frac{1}{n} = 0{,}75, \ \cos\alpha_{пред} = 0{,}66.$$

Получаем

$$h_1 = \frac{l_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha_{пред} = 1{,}76 \text{ м}.$$

Задача 13. *Правильная треугольная призма из прозрачного материала с показателем преломления n лежит на столе на одной из своих граней. На одной из двух оставшихся граней сидит паук, а по другой ползет муха. При каких n паук не увидит муху?*

Решение. Лучи от мухи входят в призму в виде конуса с углом полураствора $\alpha_{пред}$ (рис.17). Крайний верхний луч падает на соседнюю грань (где сидит паук) под углом $\beta = 180° - 120° - \alpha_{пред}$ (угол между двумя

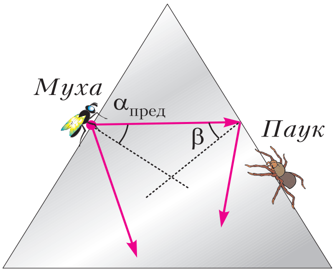


Рис. 17

нормалями равен 120°). Если $\beta \ge \alpha_{пред}$, то ни один луч не выйдет из грани с пауком. Получаем

$$60° - \alpha_{пред} \ge \alpha_{пред}, \ \alpha_{пред} \le 30°,$$

$$\sin\alpha_{пред} \le 0{,}5, \ \frac{1}{n} \le 0{,}5, \ n \ge 2.$$

Следующая задача демонстрирует, что изображение может формироваться плоской преломляющей поверхностью.

Задача 14. *Глубина водоема $h = 2$ м. Определите кажущуюся глубину водоема, если его дно рассматривают, склонившись над водой и глядя вертикально вниз. Показатель преломления воды $n = 4/3$. Углы считать малыми, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha = \alpha$.*

Решение. Изображение источника лежит в точке пересечения преломленных лучей. Убедимся в том, что все преломленные лучи, составляющие малые углы с вертикалью, пересекаются в одной точке. Один из лучей от источника идет вертикально вверх и выходит из воды не преломляясь. Значит, изображение лежит на этой вертикали. Рассмотрим луч, испущенный источником под произвольным малым углом α к вертикали (рис.18). Угол преломления β связан с углом падения α законом преломления $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n$, или, с учетом малости углов, $\beta = n\alpha$. Выразим углы через малое расстояние y между вертикалью и точкой выхода луча и через расстояния x и h:

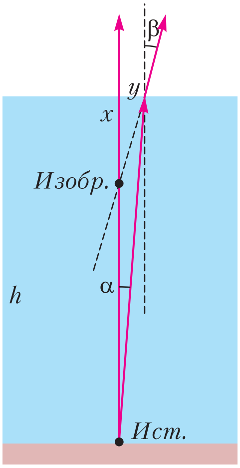


Рис. 18

$$\alpha = \frac{y}{h}, \ \beta = \frac{y}{x}.$$

Получаем

$$\frac{y}{x} = n\frac{y}{h}, \ x = \frac{h}{n}.$$

Точка пересечения преломленных лучей с вертикалью действительно не зависит от угла α, т.е. лучи, идущие под малыми углами, формируют мнимое изображение предмета на глубине

$$x = \frac{h}{n} = 150 \text{ см.}$$

Отметим, что более универсальный характер имеет не формула для расстояния от изображения до поверхности, а формула для смещения источника в направлении хода лучей, т.е. для расстояния между источником и изображением, которое равно $h - \frac{h}{n}$.

Изображение формируется не только плоской отражающей поверхностью и плоской преломляющей поверхностью, но и сферическими поверхностями. Изображения в таких системах можно строить и рассчитывать, не опираясь на общую теорию сферических зеркал и поверхностей, которую в большинстве школ не проходят. Для нахождения изображения надо действовать примерно так же, как в случае плоской преломляющей поверхности. Все малые углы отсчитываются от оси – луча, проходящего через источник и центр шара (этот луч выходит из системы без изменения направления). Для произвольного испущенного источником луча строится выходящий луч и рассчитывается связь между тремя (а не двумя!) углами: между осью и испущенным лучом (α), между осью и проведенным в точку отражения или преломления радиусом (γ) и между осью и выходящим лучом (β). Отсюда получают связь между положением источника и положением изображения.

Задача 15. *Источник находится рядом с зеркальным шаром радиусом $R = 15$ см на расстоянии $l = 2R$ от ближайшей к нему точки шара. На каком расстоянии l' от этой точки находится изображение? Углы считать малыми.*

Решение. Пускаем на зеркало луч под произвольным малым углом α к оси (рис.19).

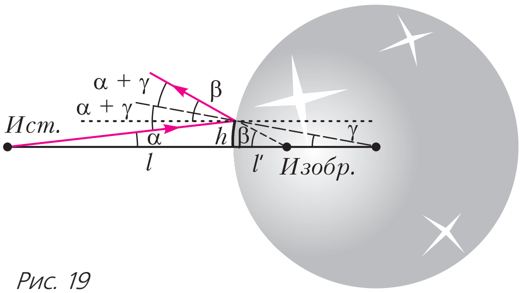


Рис. 19

Проводим из центра в точку падения радиус, который является нормалью, угол между этим радиусом и осью обозначаем γ. Строим отраженный луч и продолжаем его до пересечения с осью – этот угол обозначаем β (здесь находится изображение). Угол падения равен $\alpha + \gamma$, угол между отраженным лучом и нормалью также равен $\alpha + \gamma$. Проведя в точке падения линию, параллельную оси, видим, что угол β равен сумме угла отражения $\alpha + \gamma$ и угла наклона нормали γ:

$$\beta = \alpha + 2\gamma .$$

Подставляя сюда, с учетом малости углов,

$$\alpha = \frac{h}{l}, \quad \beta = \frac{h}{l'}, \quad \gamma = \frac{h}{R},$$

получаем

$$\frac{1}{l'} = \frac{1}{l} + \frac{2}{R}, \text{ откуда } l' = 0,4R = 6 \text{ см} .$$

Задача 16. *Аквариум из тонкого стекла имеет форму шара радиусом $R = 3$ м. Аквариум заполнили водой и запустили туда маленькую рыбку. В какой-то момент рыбка оказалась между глазами наблюдателя и центром шара на расстоянии $a = 1$ м от центра. На сколько сантиметров кажущееся положение рыбки будет ближе реального? Показатель преломления воды $n = 4/3$. Углы считать малыми.*

Решение. Пускаем от источника (рыбки) в сторону наблюдателя луч под малым углом α к оси (рис.20). Проводим в точку падения

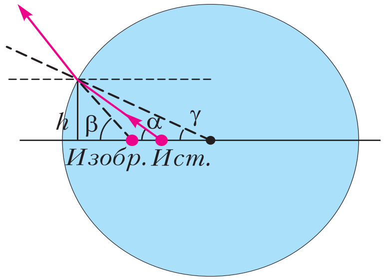


Рис. 20

этого луча на поверхность радиус, который является нормалью; угол между нормалью и осью обозначаем γ. Из треугольника (α – внешний угол) видно, что угол падения равен $\alpha - \gamma$. Из закона преломления, с учетом малости углов, следует, что угол преломления равен $n(\alpha - \gamma)$. Продолжаем преломленный луч до пересечения с осью – здесь находится изображение. Проведя в точке преломления линию, параллельную оси, получим, что угол между преломленным лучом и осью равен

$$\beta = n(\alpha - \gamma) + \gamma .$$

Подставляя сюда, с учетом малости углов,

$$\alpha = \frac{h}{l}, \quad \beta = \frac{h}{l'}, \quad \gamma = \frac{h}{R},$$

где $l = R - a = 2$ м и l' – расстояния от источника и изображения до точки пересечения оси с поверхностью шара, получаем

$$\frac{1}{l'} = \frac{n}{l} - \frac{n-1}{R},$$

откуда находим

$$l' = 1{,}8 \text{ м},$$

т.е. кажущееся положение рыбки будет ближе реального на 20 см.

И на десерт – задача про систему с плавно меняющимся показателем преломления. Наиболее известное проявление таких систем – миражи в пустыне или над раскаленным на солнце шоссе. У поверхности воздух горячей, показатель преломления меньше, что может приводить к отражению скользящих лучей и к зрительному ощущению зеркальной (или водной) поверхности.

Задача 17. *Луч света, распространяющийся в прозрачной среде с показателем преломления $n_0 = 2$, падает под углом α_0 ($\sin\alpha_0 = 0{,}9$) на стеклянную пластину толщиной $d = 10$ мм. Показатель преломления пластины линейно меняется от $n_1 = 2{,}5$ на ближней поверхности до $n_2 = 1{,}5$ на дальней. На какую глубину луч проникнет в пластину?*

Решение. Разобьем пластину с переменным показателем преломления на много плоских тонких слоев с показателем преломления n_i в i-м слое. Закон преломления можно записать в виде

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 .$$

При переходе луча от слоя к слою будет выполняться равенство

$$n_i \sin\alpha_i = n_0 \sin\alpha_0 .$$

С уменьшением n угол α будет увеличиваться. Максимальная глубина проникновения луча соответствует $\alpha = 90°$:

$$n_{\min} \sin 90° = n_0 \sin\alpha_0 .$$

Получаем $n_{\min} = 1{,}8$, что соответствует глубине 7 мм.

Упражнения

1. Плоское зеркало движется по направлению к точечному источнику света со скоростью 10 см/с. С какой скоростью (в см/с) движется изображение? Направление скорости перпендикулярно плоскости зеркала.

2. Сколько изображений получится от предмета в двух плоских зеркалах, поставленных под углом $60°$ друг к другу? А под углом $120°$?

3. Луч света падает на плоское зеркало под углом, синус которого 0,75. На сколько миллиметров сместится отраженный луч, если на зеркало положить прозрачную пластину толщиной 2 см с показателем преломления 4/3?

4. При переходе луча света из первой среды во вторую угол преломления $45°$, а при переходе из первой среды в третью угол преломления $30°$ (при том же угле падения). Найдите предельный угол (в градусах) полного внутреннего отражения для луча, идущего из третьей среды во вторую.

5. На верхней грани прозрачного кубика сидит паук, а по боковой грани ползет муха. При каком наименьшем показателе преломления материала кубика паук не увидит муху?

6. Пловец, нырнувший с открытыми глазами, рассматривает из-под воды светящийся предмет, находящийся над его головой на высоте 75 см над поверхностью воды. Какова будет видимая высота (в см) предмета над поверхностью воды? Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми.

7. На дне сосуда с водой лежит плоское зеркало. Толщина слоя воды 16 см. На расстоянии 20 см от поверхности воды находится точечный источник света. На каком расстоянии (в см) от зеркала находится его изображение, образуемое лучами, вышедшими обратно из воды? Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми.

8. На поверхность стеклянного шара радиусом 5 см нанесли черное пятнышко. Пятнышко разглядывают с диаметрально противоположной стороны шара. На каком расстоянии (в см) от ближайшей поверхности стекла окажется его видимое положение? Показатель преломления стекла 1,5.

9. Светящаяся точка находится на расстоянии 6 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 5 см. На какое расстояние (в см) сместится изображение точки, если между ней и линзой поставить стеклянную плоскопараллельную пластину? Пластина установлена перпендикулярно оптической оси линзы, толщина пластины 4,5 см, показатель преломления стекла 1,5.

XL Турнир городов

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2018 ГОД)

Базовый вариант

8–9 классы

1. (4)[1] Окружность, проходящая через вершину B прямого угла и середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, пересекает катеты этого треугольника в точках M и N. Оказалось, что $AC = 2MN$. Докажите, что M и N – середины катетов треугольника ABC.

М.Евдокимов

2. (4) Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию: числа 1, 2, 3, …, $2n$ можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, то получится квадрат натурального числа.

Фольклор

3. Клетчатый прямоугольник размера 7×14 разрезали по линиям сетки на квадраты 2×2 и уголки из трех клеток. Могло ли квадратов получиться:

а) (1) столько же, сколько уголков;

б) (3) больше, чем уголков?

М.Евдокимов

4. (5) У Насти есть пять одинаковых с виду монет, среди которых три настоящие – они весят одинаково – и две фальшивые: одна тяжелее настоящей, а вторая на столько же легче настоящей. Эксперт по просьбе Насти сделает на двухчашечных весах без гирь три взвешивания, которые она укажет, после чего сообщит Насте результаты. Может ли Настя выбрать взвешивания так, чтобы по их результатам гарантированно определить обе фальшивые монеты и указать, какая из них более тяжелая, а какая более легкая?

Р.Женодаров

[1] В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. Итог подводился по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за пункты одной задачи суммируются).

5. (5) Назовем девятизначное число *красивым*, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 1000 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.

М.Евдокимов

10–11 классы

1. (3) Можно ли внутри правильного пятиугольника разместить отрезок, который из всех вершин виден под одним и тем же углом? (Углом, под которым виден из точки A отрезок XY, называется угол XAY.)

Е.Бакаев, С.Дворянинов

2. (4) См. задачу 2 для 8–9 классов.

3. (5) В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На стороне AB отмечена такая точка N, что $CN = AB$. Оказалось, что описанная окружность треугольника CBN касается прямой AD. Докажите, что она касается ее в точке D.

М.Евдокимов

4. (5) Назовем девятизначное число *красивым*, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 2018 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.

М.Евдокимов

5. (5) См. задачу М2538 «Задачника «Кванта».

Сложный вариант

8–9 классы

1. (5) В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, точка E – произвольная точка внутри стороны AC. Известно, что $BE \geq 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.

Н.Седракян

2. (6) См. задачу М2534 «Задачника «Кванта».

3. (8) См. задачу М2535 «Задачника «Кванта».

4. (8) Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль

2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включенный детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблем. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

Р.Женодаров

5. (8) Равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1, O_2, O, C лежат на одной окружности.

А.Заславский

6. а) (7) См. задачу М2539, а «Задачника «Кванта».

б) (3) См. задачу М2539, б «Задачника «Кванта».

7. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причем из любого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом невозможно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется *простым*, иначе – *сложным*.

Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешенном направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что:

а) (5) в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;

б) (7) в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.

М.Дидин

10–11 классы

1. (5) См. задачу М2534 «Задачника «Кванта».

2. (7) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты AH_a и BH_b. Точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно середин сторон BC и CA соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY пополам.

Фольклор

3. а) (6) См. задачу М2539, а «Задачника «Кванта».

б) (2) См. задачу М2539, б «Задачника «Кванта».

4. (8) См. задачу М2536 «Задачника «Кванта».

5. (8) Три медианы треугольника разделили его углы на шесть углов, среди которых ровно k больше $30°$. Каково наибольшее возможное значение k?

Н.Седракян

6. (9) См. задачу М2537 «Задачника «Кванта».

7. Рокфеллер и Маркс играют в такую игру. Имеется $n > 1$ городов, во всех одно и то же число жителей. Сначала у каждого жителя есть ровно одна монета (монеты одинаковы). За ход Рокфеллер выбирает по одному жителю из каждого города, а Маркс перераспределяет между ними их деньги произвольным образом с единственным условием, чтобы распределение не осталось таким, каким только что было. Рокфеллер выиграет, если в какой-то момент в каждом городе будет хотя бы один человек без денег. Докажите, что Рокфеллер может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл Маркс, если в каждом городе:

а) (10) ровно $2n$ жителей;

б) (4) ровно $2n - 1$ жителей.

Г.Погудин

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Л.Медников, А.Семёнов

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (государственного университета) (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 100 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт.

Обучение в школе ведется по четырем предметам научно-технической направленности – *физике, математике, информатике и химии*.

В 8 классе изучаются только физика и математика. В 9–11 классах к этим предметам добавляются «Математические основы информатики и ИКТ» (информатика) и химия. Учащиеся могут по своему выбору изучать один, два, три или четыре предмета.

Количество заданий в год по классам и по предметам представлено в таблице:

8 класс		9 класс			
ф	**м**	**ф**	**м**	**и**	**х**
5	6	6	7	4	4

10 класс				11 класс			
ф	**м**	**и**	**х**	**ф**	**м**	**и**	**х**
6	7	4	4	6	8	5	4

Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты, имеющие большой опыт работы с одаренными школьниками. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Примеры заданий можно посмотреть на сайте ЗФТШ.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся предметами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Программы ЗФТШ являются профильными дополнительными общеразвивающими программами и едины для всех отделений.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2019/20 учебный год проводится на заочное (онлайн), очное и очно-заочное отделения.

Полная программа обучения рассчитана на 4 года – с 8-го по 11-й класс включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

Согласно положению о ЗФТШ учащийся может обучаться *только на одном отделении* ЗФТШ.

Учащиеся всех отделений, успешно справившиеся с программой ЗФТШ, по окончании 11 класса получают Свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по изучавшимся в 11-м классе предметам. Свидетельство учитывается при поступлении в МФТИ в соответствии с правилами приема в МФТИ и Порядком учета индивидуальных достижений поступающих (https://pk.mipt.ru/bachelor/2019_ID/).

Ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ–2020», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в феврале или начале марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов.

Для учащихся и руководителей факультативных групп работает *online-лекторий* по физике, математике и химии по программе ЗФТШ. Лекции читают преподаватели МФТИ (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ЗФТШ.

Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Для учащихся, проживающих за пределами Российской Федерации, возможно только платное обучение на заочном, онлайн и очно-заочном отделениях.

Заочное отделение *(индивидуальное заочное обучение)*

Тел./факс: (495) 408-51-45,
e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительных заданий по выбранным для изучения предметам.

ЗФТШ постепенно переходит на работу на онлайн-платформе. Поэтому:

школьники, поступающие в 8 и 9 классы заочного отделения, выполняют вступительное задание на сайте https://zftsh.online/;

школьники, поступающие в 10 и 11 классы заочного отделения, вступительное задание выполняют в тетради, оформляют в соответствии с нашими требованиями (см. ниже) и высылают Почтой России *не позднее 1 марта 2019 года.*

Обучение на платформе zftsh.online

Ученик в течение учебного года в соответствии с программой получает в личном кабинете на сайте https://zftsh.online/ доступ к заданиям по изучаемым предметам. Ученик выполняет на сайте задания с помощью встроенного редактора или путем прикрепления фотографий работ, выполненных в тетради.

Работы по истечении срока выполнения проверяют на сайте закрепленные за учеником преподаватели ЗФТШ. Как только работа проверена, ученик видит свою работу с рецензией и авторскими решениями контрольной части задания.

Как проходит обучение для 10 и 11 классов

В течение учебного года в соответствии с программой ЗФТШ ученик получает (берет в личном кабинете на сайте http://www.school.mipt.ru/) по каждой теме задания по изучаемым предметам. Выполняет их, оформляет в школьной тетради и высылает в ЗФТШ Почтой России. Проверенные работы вместе с авторскими решениями этих заданий высылаются обратно также Почтой России.

Обучение в обоих случаях проводится по одним и тем же программам и заданиям, выпускники получают одинаковые Свидетельства об окончании, работы учащихся проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ. Отличие только в способе отправки заданий.

Правила оформления вступительного задания для поступающих в 10 и 11 классы

Вступительные задания по выбранным предметам ученик выполняет самостоятельно *в одной* школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в конверте *простой бандеролью* или простым письмом. На лицевую сторону тетради наклейте *заполненный бланк* (его также можно заполнить в электронном виде на сайте ЗФТШ, а затем распечатать):

Л№												
№ задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	17	Σ
Ф												
М												
И												
Х												

(таблица заполняется методистом ЗФТШ)

1. Республика, край, область ____________
2. Фамилия, имя, отчество _______________
____
3. Класс, в котором учитесь ____________
4. Если вы уже учитесь в ЗФТШ, напишите свой личный номер ____________
5. Предметы, по которым выполнены задания (отметьте галочками)
   □ физика □ математика
   □ информатика □ химия
6. Номер и/или название школы ___________
7. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, центр образования и т.п.) _________________
8. Ф. И. О. учителей
   по физике ___________________________
   по математике _______________________
   по информатике ______________________
   по химии ____________________________
9. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail _____________
10. Имя, отчество и № телефона одного из родителей ______________________________

На конкурс ежегодно приходит более 5 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения бланка! Будьте аккуратны!

На внутреннюю сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь два одинаковых конверта размером 160×230 мм. На каждый конверт наклейте марки на сумму 50 руб. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Тетрадь с выполненными заданиями высылайте на адрес ЗФТШ *не позднее 1 марта 2019* *года.* Проверенные вступительные работы обратно не высылаются.

Все присланные в ЗФТШ работы регистрируются. Информацию о получении работ можно увидеть на сайте ЗФТШ в разделе «Вступительные задания». Решение приемной комиссии будет выслано в июле 2019 года.

Вниманию школьников, уже обучающихся на заочном отделении ЗФТШ

Если школьник уже обучается в ЗФТШ и хочет добавить на следующий год еще предмет, необходимо выполнить и прислать в ЗФТШ вступительное задание по этому предмету. На бланке обязательно укажите свой личный номер.

Учащимся, обучающимся на платформе zftsh.online, для добавления предмета необходимо выполнить вступительное задание по этому предмету на сайте https://zftsh.online/

Решение приемной комиссии в таких случаях не высылается, а дополнительный предмет становится доступным учащемуся в личном кабинете в случае положительного решения приемной комиссии.

Очно-заочное отделение *(обучение в факультативных группах)*

Тел.: (498) 744-63-51,

e-mail: fakultativ@mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя, тремя или четырьмя преподавателями* – физики, математики, информатики и химии, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в ЗФТШ по заявлению директора на бланке общеобразовательного учреждения (образец можно посмотреть в разделе «очно-заочное отделение» сайта ЗФТШ), в котором должны быть указаны фамилии, имена, отчества руководителей факультативной группы по предметам и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. в алфавитном порядке полностью с указанием класса *текущего учебного года* и итоговых оценок за вступительное задание по выбранным предметам), *адрес, телефон, факс и e-mail школы*.

Заявление можно выслать обычной почтой, вложив конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей на адрес ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»), или выслать в отсканированном виде (с подписями и печатью) на e-mail: fakultativ@mipt.ru *до 25 мая 2019 года* на адрес ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»).

Тетради с работами учащихся проверяются учителями физики, математики, информатики и химии, *в ЗФТШ не высылаются*.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлении ЗФТШ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут в течение учебного года получать учебно-методические материалы (программы по физике, математике, химии и информатике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся); приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость (11 класс) за год, образец есть на сайте ЗФТШ.

Очное отделение *(заочное обучение с посещением очных консультаций)*

Тел.: (925) 755-55-80,

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится в сентябре в два этапа:

- заочный этап – тестирование на сайте http://zftsh.online/,
- очный этап – устные экзамены.

Более подробная информация о наборе на очное отделение размещается на сайте ЗФТШ в начале сентября. Занятия с учащимися очного отделения проводятся в учебных корпусах МФТИ в городах Долгопрудный и Жуковский.

Контакты ЗФТШ

Почтовый адрес: Институтский пер., д.9, г. Долгопрудный, Московская область, 141700, ЗФТШ

Тел./факс: (495) 408-51-45 – заочное отделение, (498) 744-63-51 – очно-заочное отделение, (498) 744-65-83 и (925) 755-55-80 – очное отделение.

E-mail: zftsh@mail.mipt.ru – заочное и очное отделения, fakultativ@mipt.ru – очно-заочное отделение.

Сайт: www.school.mipt.ru
ВК: https://vk.com/club1032617

Очное отделение при ФАЛТ МФТИ в Жуковском
E-mail: vftsh@mail.ru
ВК: https://vk.com/vftshfalt

УЗФТШ

Для школьников Украины работает УЗФТШ при ФТННЦ НАН Украины (обучение платное). Желающим поступить туда следует высылать работы по адресу: 03680, Украина, г. Киев, б-р Вернадского, д. 36, ГСП, УЗФТШ.

Тел.: 8(10-38-044) 424-30-25, 8(10-38-044) 422-95-64
E-mail: ftcsch@imp.kiev.ua
Сайт УЗФТШ: www.mfti.in.ua

Ниже приводятся вступительные задания по физике, математике, информатике и химии. Номера задач, обязательных для выполнения (для поступления на заочное и очно-заочное отделения), и максимальные баллы приводятся в таблице (номера классов указаны на текущий 2018/19 учебный год):

Номера задач

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	1–5	4–8	9–13	13–17
Математика	1–5	3–8	4,5,7–11	8–14
Информатика		1–5	6–10	9,11–14
Химия		1–7	5,8–13	3,8,10,11, 13,14,15

Максимальные баллы

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	25	25	25	25
Математика	14	20	26	28
Информатика		5	10	14
Химия		35	35	41

Вступительные задания

ФИЗИКА

1. Автомобиль ехал шестую часть пути со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, треть пути – со скоростью $v_2 = 60$ км/ч, а оставшуюся половину пути – со скоростью $v_3 = 100$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

2. U-образная трубка с вертикально расположенными коленами частично заполнена ртутью. В правое колено долили слой масла высотой $H_1 = 10$ см. Какой высоты слой воды надо долить в левое колено, чтобы ртуть в обоих коленах расположилась на одном горизонтальном уровне? Плотность масла $\rho_1 = 0{,}9$ г/см^3, плотность воды $\rho_2 = 1$ г/см^3. Жидкости не перемешиваются и из трубки не выливаются.

3. Высоко в горах в горном озере на глубине $H = 3$ м полное давление равно $p = 100$ кПа. Чему равно атмосферное давление вблизи озера? Принять $g = 10$ м/с^2, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

4. Однородная балка длиной l и массой $m_1 = 200$ кг лежит горизонтально, опираясь концами на две опоры. К балке на расстоянии $l/3$ от левого конца подвешен груз массой $m_2 = 300$ кг. С какой силой балка действует на левую опору?

5. Шарик висит на нити. После погружения шарика полностью в воду сила натяжения нити уменьшилась на 13%. Найдите плотность материала шарика. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

6. В калориметре содержится $m_1 = 200$ г воды при температуре $t_1 = 20$ °C. В воду бросили $m_2 = 30$ г мокрого снега. В калориметре установилась температура $\theta = 10$ °C. Найдите массу воды в снеге. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг.

7. Три резистора сопротивлениями R, $5R$ и $6R$ соединены последовательно и включены в сеть напряжением U. Идеальный вольтметр, подсоединенный к резистору сопротивлением R, показывает $V = 2$ В. Найдите напряжение U.

8. В пустую стеклянную бутылку массой $m_1 = 600$ г и вместимостью $V = 0{,}8$ л наливают $m_2 = 450$ г воды и опускают в ведро с водой. Бутылка стала плавать, почти полностью погрузившись в воду. Найдите плотность стекла. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

9. Стальной шарик брошен с балкона вертикально вверх. Через время $t_1 = 1$ с шарик достиг верхней точки траектории.

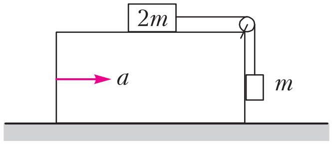
Через время $t_2 = 3$ с от начала движения шарик упал на земную поверхность. На какой высоте от земной поверхности находится балкон? Сопротивление воздуха не учитывать. Принять $g = 10$ м/с^2.

10. Автомобиль массой $m = 1500$ кг, двигаясь с постоянной скоростью на подъеме с углом наклона поверхности дороги к горизонту α $(\sin\alpha = 1/20)$, развивает силу тяги $F = 1000$ Н. Найдите силу сопротивления движению.

11. Спутник Земли движется по круговой орбите радиусом $2R$, где $R = 6400$ км – радиус Земли. Найдите период обращения спутника (*в минутах*).

12. Брусок, двигавшийся по горизонтальной поверхности стола со скоростью v_0, сталкивается с неподвижным бруском втрое меньшей массы. Удар упругий, все скорости направлены вдоль одной прямой. Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ. На какое расстояние разъедутся бруски после столкновения?

13. Грузы массами m и $2m$ связаны легкой нитью, перекинутой через блок, укрепленный на бруске (см. рисунок). Верхняя горизонтальная поверхность бруска гладкая. Коэффициент трения между вертикальной поверхностью бруска и грузом $\mu = 1/3$. С каким минимальным ускорением, направленным горизонтально, надо двигать брусок, чтобы груз массой m поднимался вверх? Трением в оси блока пренебречь.



14. В цилиндре под поршнем давление воздуха уменьшилось на 30%, а температура (по шкале Кельвина) увеличилась на 40%. На сколько процентов и как изменилась плотность воздуха в цилиндре?

15. Идеальный одноатомный газ в количестве ν моль нагревают от температуры T_1 до температуры T_2 в процессе, в котором давление газа растет пропорционально его объему. Какое количество теплоты получил газ?

16. В двух ближайших вершинах квадрата находятся точечные заряды Q и $2Q$. Потенциал электростатического поля в ближайшей к заряду Q вершине квадрата равен $\varphi_1 = 410$ В. Найдите потенциал поля в четвертой вершине квадрата.

17. Три резистора сопротивлениями R, $2R$ и $3R$ соединены последовательно и подключены к источнику с внутренним сопротивлением намного меньше R. Идеальный вольтметр, подсоединенный к резистору сопротивлением R, показывает $V = 2$ В. Найдите ЭДС источника.

МАТЕМАТИКА

1 (3 балла). Цена товара поднялась на 5%, после чего зарплату поднимали дважды: сначала на 8%, а затем еще на 12%. На сколько процентов больше товара стало можно купить после изменения цены и повышения зарплаты?

2 (2 б.). Отрезок AP – биссектриса треугольника ABC. На стороне AB этого треугольника взята точка F такая, что $AF : FB = 119 : 256$ и $CF \perp AP$. Найдите AC, если $AB = 3000$.

3 (3 б.). Два велосипедиста движутся каждый по своей круговой трассе с постоянными скоростями. Известно, что радиус трассы первого велосипедиста в 4 раза больше радиуса трассы второго. При этом первый велосипедист за 15 минут проезжает на 2 километра больше второго, но совершает в 3 раза меньше оборотов. Найдите скорости велосипедистов.

4 (3 б.). Сократите дробь $\dfrac{81x^4 + 9x^2 + 1}{9x^2 + 3x + 1}$.

5 (3 б.). В саду растут яблони, груши и сливы. Известно, что количество яблонь в 6 раз больше количества груш, а количество слив кратно количеству груш. Если количество слив увеличить в 7 раз, то оно превзойдет количество яблонь на 33. Сколько всего деревьев в этом фруктовом саду?

6 (3 б.). Периметр параллелограмма равен 360, а его острый угол равен 60°. Найдите стороны параллелограмма, если известно, что его меньшая диагональ делит его углы в отношении 3 : 1.

7 (3 б.). Упростите выражение

$$\left(\sqrt{\frac{1}{4y^2} - 1} - \frac{1}{2y}\right)\left(\frac{\sqrt{1+2y}}{\sqrt{1+2y} - \sqrt{1-2y}} + \frac{1-2y}{\sqrt{1-4y^2} + 2y - 1}\right),$$

если известно, что $y > 0$.

8 (5 б.). Трое студентов собираются вместе купить два одинаковых ноутбука, но, сложив вместе все имеющиеся у них деньги, они обнаружили, что у них не хватает даже на один ноутбук. Если бы у первого студента было в два раза больше денег, то на покупку ноутбуков им бы не хватило 34000 рублей. Если бы у третьего студента было втрое больше денег, то после покупки двух ноутбуков у них бы осталось 6000 рублей. Сколько стоит один ноутбук, если известно, что цена и количество денег у каждого из студентов есть целое число тысяч рублей, причем у второго студента на 9000 рублей больше, чем у первого?

9 (4 б.). Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{5x-2y}+\sqrt{5x+2y}=34,\\ \sqrt{25x^2-4y^2}=273.\end{cases}$$

10 (4 б.). Один из углов параллелограмма равен $45°$, а расстояния от точки пересечения его диагоналей до каких-то двух его сторон равны 8 и 12. Найдите площадь этого параллелограмма.

11 (4 б.). Найдите все значения параметра a такие, что неравенство

$$-4<\frac{x^2+ax-3}{x^2+x+2}<2$$

выполнено при всех значениях x.

12 (4 б.). Решите уравнение

$$\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\sin^3 x-\sin^2 x+\sin x=0.$$

13 (4 б.). В окружность радиуса $\sqrt{290}$ вписан четырехугольник $ABCD$, у которого $\angle D=90°$, $AB:BC=17:1$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если его площадь равна 320.

14 (3 б.). Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{9x^2-12x-1}-3}{|3x+2|-7}\ge 1.$$

ИНФОРМАТИКА

1 (1 балл). Света, Зина, Галя и Таня рисовали цветы. Одна рисовала красным карандашом, трое других – синими. Галя и Зина рисовали карандашами разного цвета, Зина и Таня – тоже. Двое из них рисовали васильки, а другие – колокольчики. Кто что нарисовал, если Зина и Таня рисовали одинаковые цветы, а Зина рисовала василек? Ответ надо обосновать.

2 (1 б.). Для кодирования сообщений решено использовать последовательности разной длины, состоящие из знаков «+» и «–». Сколько различных сообщений можно закодировать, используя в каждом из них не менее 3 и не более 7 знаков? Ответ надо обосновать.

3 (1 б.). Сколько записей в нижеследующем фрагменте экзаменационной ведомости удовлетворяют условию

«**Место <=4 И (В>4 ИЛИ МЗ>12)**»?

Место	Команда	**В**	**Н**	**П**	**О**	**МЗ**	**МП**
1	Боец	5	3	1	18	9	5
2	Авангард	6	0	2	18	13	7
3	Опушка	5	1	4	16	13	7
4	Звезда	3	6	0	15	5	2
5	Химик	3	3	3	12	14	17
6	Пират	3	2	4	11	13	7

4 (1 б.). В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на 3? Ответ надо обосновать.

5 (1 б.). Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 24 оканчивается на 3. Ответ надо обосновать.

6 (1 б.). Какое наименьшее число символов должно быть в алфавите, чтобы при помощи всевозможных трехбуквенных слов, состоящих из символов данного алфавита, можно было передать не менее 9 различных сообщений? Ответ надо обосновать.

7 (2 б.). Автомат получает на вход пятизначное десятичное число. По полученному числу строится новое десятичное число по следующим правилам.

1) Вычисляются два числа – сумма первой, третьей и пятой цифр и сумма второй и четвертой цифр заданного числа.

2) Полученные два числа записываются друг за другом в порядке невозрастания (без разделителей).

Пример. Исходное число: 15177. Поразрядные суммы: 9, 12. Результат: 129.

Определите, какие из приведенных ниже чисел могут получиться в результате работы автомата:

40 1440 140 1420 2014 1921 4014 214 2119.

Приведите возможные примеры таких пятизначных чисел.

8 (2 б.). Определите значения целочисленных переменных a и b после выполнения фрагмента программы:

```
a:=2468;
b:=(a mod 1000)*10;
a:=a div 1000+b
```

{div и mod – операции, вычисляющие результат деления нацело первого аргумента на второй и остаток от деления соответственно}.

9 (2 б.). Исполнитель Чертежник перемещается на координатной плоскости, оставляя след в виде линии. Чертежник может выполнять команду **Сместиться на $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$** (где a, b – целые числа), перемещающую Чертежника из точки с координатами $(x,\ y)$ в точку с координатами $(x+a,\ y+b)$. Если числа a, b положительные, значение соответствующей координаты увеличивается, если отрицательные – уменьшается.

Чертежнику был дан для исполнения следующий алгоритм:

Повтори 4 раза.

Сместиться на (−2, −4). Сместиться на (3, 3). Сместиться на (1, −2).

Конец

Какую команду надо выполнить Чертежнику, чтобы вернуться в исходную точку, из которой он начал движение?

10 (3 б.). На вход программе подается последовательность натуральных чисел. Признак конца ввода – ноль. Напишите программу, которая находит сумму чисел, которые делятся на 7 и последняя цифра которых равна 3. Числа не превосходят 10000. Массивы не использовать.

11 (2 б.). Какие из перечисленных ниже слов удовлетворяют условию

($\neg$ последняя буква согласная $\rightarrow$ первая буква гласная) & третья буква согласная?

Ответ надо обосновать.

Индюк, кошка, козел, кобыла, корова, обезьяна, слон, собака.

12 (2 б.). Сколько значащих нулей в двоичной записи шестнадцатеричного числа $C2B1{,}3A_{16}$? Ноль называется значащим, если удаление его из записи числа ведет к изменению значения числа. Приведите решение задачи.

13 (4 б.). Напишите на языке программирования Паскаль или в виде блок-схемы алгоритм, позволяющий вычислить сумму всех делителей введенного натурального числа.

14 (4 б.). Напишите на языке программирования Паскаль или С либо в виде блок-схемы алгоритм, определяющий количество различных корней в обобщенном квадратном уравнении. На вход алгоритму подаются коэффициенты a, b, c, на выходе нужно вывести количество различных корней.

ХИМИЯ

1 (3 балла). а) (1 б.) Какие массы 25%-го и 5%-го растворов сульфата магния нужно смешать, чтобы получить 40 г 20%-го раствора?

б) (2 б.) Является ли приготовленный раствор насыщенным при 20 °С если растворимость сульфата магния при 20 °С составляет 35,1 г на 100 г воды? Ответ подтвердите расчетами.

2 (5 б.). Газ, полученный при полном термическом разложении 31,6 г перманганата калия, смешали с газом, полученном при взаимодействии 13 г цинка и 50 г раствора серной кислоты с массовой долей кислоты 19,6%. Смесь взорвали. Определите, какой газ оказался в избытке, и рассчитайте его объем в пересчете на н.у.

3 (10 б.). Даны вещества: раствор гидроксида калия, оксид алюминия, соляная кислота, карбонат натрия кристаллический, углекислый газ, вода. Напишите уравнения не менее десяти возможных реакций между ними.

4 (4 б.). Осуществите цепочку превращений:

$$Cr_2(SO_4)_3 \xrightarrow{+NaOH} A \xrightarrow{+NaOH} B \rightarrow$$
$$\xrightarrow{+H_2SO_4} A \xrightarrow{+H_2SO_4} Cr_2(SO_4)_3.$$

5 (4 б.). Смешали 140 г 20%-го раствора гидроксида натрия и 294 г 10%-го раствора ортофосфорной кислоты. Вычислите массовые доли веществ в растворе после реакции.

6 (4 б.). Цинк полностью растворили в концентрированном растворе гидроксида калия. Образовавшийся прозрачный раствор выпарили, а затем прокалили. Твердый остаток растворили в необходимом количестве соляной кислоты. К образовавшемуся прозрачному раствору добавили сульфид натрия и наблюдали образование белого осадка. Напишите уравнения четырех описанных реакций.

7 (5 б.). При сгорании 8,1 г металла получилось 15,3 г оксида. Определите, какой металл сгорел, если его степень окисления в оксиде равна +3.

8 (10 б.). а) (1 б.) Напишите электронную конфигурацию атомов фосфора и кальция.

б) (2 б.) Определите их высшую и низшую степени окисления. Напишите формулы их высших оксидов, определите их характер (кислотные, основные, амфотерные).

в) (2 б.) Какие гидроксиды соответствуют данным оксидам? Каков их характер?

г) (1 б.) Перечислите основные аллотропные модификации фосфора.

д) (4 б.) Напишите не менее четырех реакций взаимодействия между высшими гидроксидами фосфора и кальция.

9 (4 б.). Напишите уравнения реакций в полной молекулярной форме, которые соответствуют следующим сокращенным ионным уравнениям:

а) $NH_4^+ + OH^- \rightarrow NH_3\uparrow + H_2O$,

б) $HS^- + H^+ \rightarrow H_2S\uparrow$,

в) $HS^- + OH^- \rightarrow S^{2-} + H_2O$,

г) $HSO_4^- + BaOH^+ \rightarrow BaSO_4\downarrow + H_2O$.

10 (7 б.). Осуществите цепочку превращений:

$$\begin{tikzcd}
Fe \arrow[r, shift left] & FeCl_2 \arrow[l, shift left] \arrow[r] & A \arrow[r] & Fe(OH)_3 \arrow[d] \\
 & & B \arrow[ul] & KFeO_2 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

11 (4 б.). Оксид серы (IV) пропустили через раствор сероводорода. Образовавшийся при этом осадок обработали горячей концентрированной азотной кислотой. Выделившийся бурый газ пропустили через раствор гидроксида бария. При взаимодействии одной из образовавшихся солей с водным раствором перманганата калия образовался бурый осадок. Напишите уравнения четырех описанных реакций.

12 (4 б.). Хлорид фосфора (V) массой 4,17 г полностью прореагировал с водой. Какой минимальный объем раствора гидроксида калия с массовой долей 10% (плотностью 1,07 г/мл) необходим для полной нейтрализации полученного раствора?

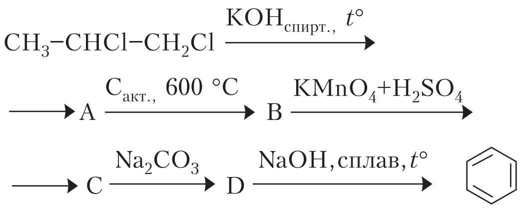
13 (2 б.). Ниже приведена схема реакции:

$$NO_2\,(г) \rightarrow N_2O_4\,(ж) + Q\ .$$

Преобразуйте ее в уравнение обратимой реакции, расставьте коэффициенты. Определите, в какую сторону сместится равновесие при: а) повышении температуры, б) понижении давления.

14 (3 б.). В органическом соединении массовая доля кислорода составляет 23,53%, водорода – 5,88%. Определите молекулярную и структурную формулы соединения, если известно, что при его щелочном гидролизе образуются две соли. Напишите уравнение реакции данного соединения с водным раствором гидроксида натрия.

15 (5 б.). Осуществите цепочку превращений:



ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №11 за 2018 г.)

9. 11 минут.

Выпишем все палиндромы: 00:00, 01:10, 02:20, 03:30, 04:40, 05:50, 10:01, 11:11, 12:21, 13:31, 14:41, 15:51, 20:02, 21:12, 22:22, 23:32. Лишь после двух из них – 05:50 и 15:51 – ждать следующего палиндрома надо более 4 часов. В обоих случаях – 4 ч 11 мин.

10. Если число n, не меньшее 12, четное, то число $n-4$ четное и составное. Тогда $n=4+(n-4)$. Если же n нечетное, то $n-9$ четное и не меньше 4. Опять же, $n=9+(n-9)$.

11. Операция P_X представляет собой отражение треугольника относительно биссектрисы угла X. Биссектрисы всех углов треугольника пересекаются в одной точке, обозначим ее I. Значит, точка I при выполнении операций остается на одном и том же месте.

Пусть изначально вершины A, B, C идут по часовой стрелке (другой случай аналогичен) и $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Рассмотрим первую операцию P_A. Пусть вершина B перешла в вершину B'. Тогда если AL – биссектриса угла A, то $\angle BIL=\angle IAB+\angle IBA=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (рис.1). Так как

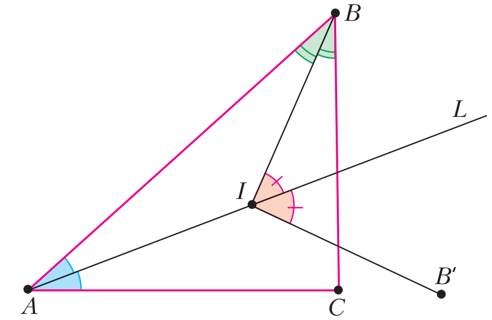


Рис. 1

AL – ось симметрии точек B и B', то $\angle BIB'=$ $=2\angle BIL=\alpha+\beta$. Таким образом, при первой операции точка B повернулась вокруг I на угол $\alpha+\beta$. При второй операции, т.е. P_B, точка B остается на месте. Итак, после первых двух операций треугольник дважды перевернулся и поэтому стал лежать той же стороной вверх, что и сначала; точка I осталась на месте; точка B повернулась на угол $\alpha+\beta$ по часовой стрелке вокруг точки I, а значит, и весь треугольник повернулся на такой угол вокруг I.

Аналогично рассматривается и следующая пара операций P_C и P_A – ведь вершина A так же идет после C при обходе по часовой стрелке, как B после A. Значит, за эту пару операций треугольник повернется вокруг I на угол $\gamma+\alpha$. И за третью пару операций аналогично – треугольник повернется на угол $\beta+\gamma$.

В совокупности за 3 этих пары операций треугольник повернется на $2(\alpha+\beta+\gamma)=360°$ по часовой стрелке вокруг I, т.е. сделает один полный оборот и станет лежать так же, как сначала.

12. Пусть $A(n)$ – количество заполнений прямоугольника $2\times n$ $(n>1)$, удовлетворяющих условию. Покажем, как связаны $A(n)$ и $A(n-1)$. Все возможные заполнения прямоугольника $2\times n$ разбиваются на две группы: А) когда «2» стоит над «1» и Б) когда «2» стоит справа от «1» (рис.2).

А)

2				
1				

Б)

k				
1	2			

Рис. 2

Посчитаем, сколько есть заполнений типа А. После того как поставлены первые цифры, осталось заполнить прямоугольник $2\times(n-1)$, начиная либо с левого нижнего его угла, либо с левого верхнего. Для каждого из этих вариантов есть по $A(n-1)$ способов это сделать, т.е. способов типа А всего $2A(n-1)$.

Переходим к заполнениям типа Б. Пусть над «1» стоит «k». Тогда осталось заполнить прямоугольник $2\times(n-1)$ числами от 2 до $2n$, кроме k, начиная с левого нижнего его угла, а это аналогично расстановке чисел от 1 до $2(n-1)$ в таком же прямоугольнике, тоже начиная с левого нижнего угла. Поэтому количество таких способов равно $A(n-1)$ для каждого k. А возможных вариантов k всего $(2n-2)$, так как k может быть любым от 3 до $2n$. Значит, способов типа Б всего $(2n-2)A(n-1)$.

Складывая количества способов А и Б, получим

$$A(n)=2A(n-1)+(2n-2)A(n-1)=2nA(n-1).$$

Тогда, выражая очередное $A(n)$ через предыдущее, получаем цепочку:

$$A(1)=1,$$
$$A(2)=4,$$
$$A(3)=6\cdot 4,$$
$$A(4)=8\cdot 6\cdot 4,$$
$$\ldots$$
$$A(n)=2n\cdot(n-2)\cdot(2n-4)\cdot\ldots\cdot 4=2^{n-1}n!.$$

ДОБРЫНЯ И КУЧА КАМНЕЙ

1. 0.

Будем называть камни из одной кучи знакомыми, из разных – незнакомыми. Тогда доход Сизифа за одно перетаскивание равен изменению количества пар знакомых камней. Так как в конечный момент все камни оказались в исходных кучах, то общее изменение количества знакомств равно нулю, а значит, и доход Сизифа равен нулю.

2. xy.

Паре a, b чисел на доске поставим в соответствие прямоугольник $a \times b$. Тогда за одну операцию мы отрезаем от прямоугольника квадрат (со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника), а на бумажку записываем площадь отрезанного квадрата. Так мы действуем, пока не отрежем все, т.е. на бумажке будет записана площадь прямоугольника.

3. xyz.

Аналогично предыдущей задаче, мы отрезаем слои от кирпича $x \times y \times z$, пока не исчерпаем весь его объем.

ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ СВЕТА

1. $v_{\text{из}} = 20\,\text{см/с}$.

2. Для угла $60°$ будет 5 изображений, для угла $120°$ будет 2 или 3 изображения. *Указание.* Если источник лежит на биссектрисе угла $120°$, то первое изображение в любом из зеркал находится на продолжении другого зеркала, лучи во второе зеркало не попадут. Если же источник лежит не на биссектрисе, то лучи, отраженные от ближнего зеркала, смогут потом отразиться от дальнего, а лучи, отраженные от дальнего зеркала, на ближнее зеркало потом не попадают (изображение в дальнем зеркале лежит позади ближнего).

3. $x = 12$ мм. **4.** $\alpha_{\text{пред}} = 45°$. **5.** $n_{\min} = \sqrt{2}$.
6. $H = 100$ см. **7.** $l = 28$ см. **8.** $x = 20$ см.
9. $x = 75$ см.

XL ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2018 ГОД)

Базовый вариант

8–9 классы

1. Пусть M лежит на AB, а N – на BC и пусть K – середина AC (рис.3). Так как угол B прямой, то MN – диаметр данной окружности. Поскольку $BK = \frac{1}{2}AC = MN$, то BK – тоже диаметр. Тогда углы BMK и BNK прямые, откуда KM и KN – средние линии треугольника ABC.

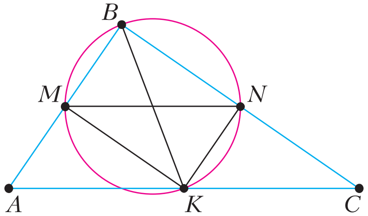


Рис. 3

2. Все $n > 1$.

Так как $1 + 2$ не квадрат, то $n = 1$ не подходит. Пусть $n > 1$. Разобьем данные числа на четверки подряд идущих и, если нужно, шестерку первых чисел. Из каждой четверки образуем

$$\left(a+(a+3)\right)\left((a+1)+(a+2)\right)=(2a+3)^2,$$

а из шестерки –

$$(1+5)(2+4)(3+6)=18^2.$$

3. а) Могло.

Пусть в прямоугольнике 7 строк и 14 столбцов. Разобьем его на полоски из двух столбцов, а каждую полоску – как показано на рисунке 4.

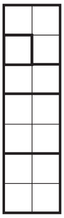


Рис. 4

б) Не могло.

Выставляя фигурки, будем следить за четностью количества покрытых клеток в каждом столбце. Квадраты не меняют эту четность, а уголок меняет четность только одного столбца. Сначала все столбцы были четными, а должны стать нечетными. Следовательно, потребуется хотя бы 14 уголков. Тогда квадратов не больше $(7 \cdot 14 - 3 \cdot 14):4 = 14$.

4. Может.

Настя отдаст эксперту четыре монеты и попросит взвесить все три разбиения их на пары. Пусть каждая из этих монет получит метку – сколько раз она была на перевесившей чаше. Для каждого вида оставшейся монеты запишем набор меток: настоящая – 2110, легкая – 3111, тяжелая – 2220. Видно, что все эти случаи различаются и в каждом из них определяется вид обеих фальшивых монет.

5. См. решение задачи 4 для 10–11 классов.

10–11 классы

1. Нельзя.

Предположим, что удалось так разместить отрезок XY. По какую-то сторону от прямой XY окажутся три вершины пятиугольника – пусть это A, B и C. Тогда точки A, B, C, X, Y лежат на одной окружности. Она совпадет с окружностью, описанной около правильного пятиугольника, поскольку имеет с ней три различные общие точки. Следовательно, точки X и Y лежат не внутри пятиугольника. Противоречие.

3. Пусть окружность касается прямой AD в точке T (рис.5). Так как $BC \parallel AD$, то $BT = CT$. Из равенства вписанных углов NBT и NCT получаем равенство треугольников ABT и NCT. Поэтому $\angle TAB = \angle TNC = \angle TBC = \angle TCB$. Зна-

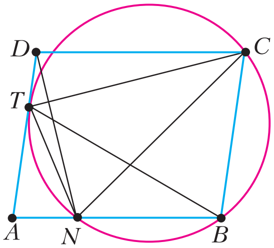


Рис. 5

чит, $ABCT$ – параллелограмм, т.е. T совпадает с D.

4. Заметим, что всякое девятизначное число M равно сумме

$$10^6 A + 10^3 B + C = 999 \cdot (1001A + B) + (A + B + C),$$

где A, B, C – числа, образованные тремя первыми, тремя следующими и тремя последними цифрами числа M. Разобьем цифры от 1 до 9 на три тройки с суммой 15 в каждой. Если мы на первые места в числах A, B, C поставим три цифры из одной тройки, на вторые – из другой, на третьи – из оставшейся, то сумма $A + B + C$ будет равна $15 \cdot 111 = 45 \cdot 37$. Так как и 999 делится на 37, то красивое число M при такой расстановке цифр будет кратно 37. Поскольку три цифры по трем местам можно расставить шестью способами и назначить три тройки на первые, вторые и третьи места тоже можно шестью способами, всего мы получим $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ красивых чисел, кратных 37.

В качестве тройки цифр с равными суммами можно взять строки магического квадрата на рисунке 6. Столбцы этого квадрата дают еще 1296 красивых чисел, кратных 37 (итого получается 2592 числа).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Рис. 6

Замечание. Всего существует 89712 красивых чисел, кратных 37, из них 34416 чисел кратны 111.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Пусть X – середина отрезка EC (рис.7). Тогда $MX = BE/2 \geq MA$. Если $MX \geq MC$, отрезок AC лежит в круге с центром M и радиусом MX и X не может лежать на границе этого круга. Значит, $MC > MX$. Тогда A лежит внутри круга с центром M и диаметром BC, откуда угол A – тупой.

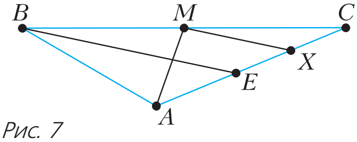


Рис. 7

4. 16 детекторов.

Оценка. В каждом прямоугольнике 2×3 должно быть хотя бы два детектора. Действительно, прямоугольник состоит из трех доминошек 1×2, и если корабль целиком лежит в нем, то занимает среднюю доминошку и одну из крайних. Один детектор в крайней доминошке не определит, есть ли корабль на двух других доминошках, а один детектор в средней доминошке, если сработает, не позволит понять, какую из крайних доминошек занимает корабль. В квадрате 7×7 помещается 8 прямоугольников 2×3 (рис.8), поэтому всего детекторов не менее 16.

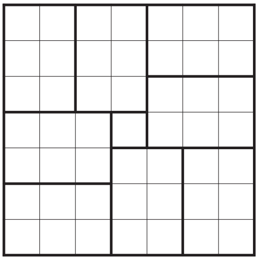


Рис. 8

Пример. На рисунке 9 синим цветом отмечены 16 детекторов. Всякий корабль пересекает ровно один синий квадрат 2×2 по одной клетке, по двум соседним или по всем четырем, что однозначно определяет положение корабля или его отсутствие.

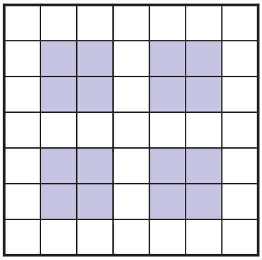


Рис. 9

5. Нетрудно понять, что AD – большее основание, треугольник AEB остроугольный, точки B, C и O_2 лежат по одну сторону от прямой OO_1 (рис. 10). Прямые OO_1, O_1O_2 и OO_2 –

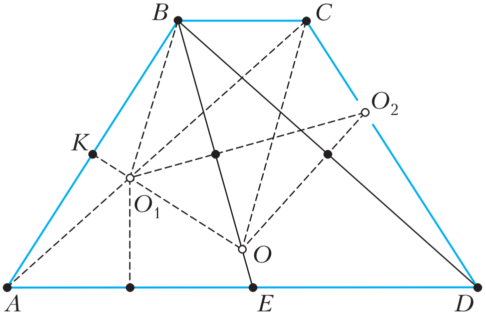


Рис. 10

серединные перпендикуляры к AB, BE и BD соответственно. Пусть K – середина AB (тогда K лежит на прямой OO_1).

Так как $\angle BO_1O_2 = \angle BAD = \angle BOO_2$ (половина центрального угла равна вписанному для треугольников BAE и BAD), то четырехугольник

OO_1BO_2 вписанный. Поскольку $\angle KO_1B = \angle AEB = \angle CBE = \angle CBO = \angle BCO$, то четырехугольник OO_1BC вписанный. Поэтому точки O, O_1, B, C, O_2 лежат на одной окружности.

7. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а ребрами – дороги.

а) Условие означает, что граф – дерево. Приведем возможную стратегию Пети. Сначала Петя выбирает произвольную вершину A. От каждой вершины существует ровно один путь (без повторяющихся ребер) в A. Все ребра на этом пути он ориентирует в сторону A.

Первым ходом Петя ставит туриста в любую вершину, соседнюю с A, и перемещает туриста в A. Все ориентированные пути ведут к туристу. Вася разворачивает одно ребро. Турист идет по нему. Ясно, что все пути снова ведут к туристу. Вася снова разворачивает одно ребро и т.д. – у Пети всегда есть ход, так что он не проиграет.

б) По условию граф связен и содержит цикл. Докажем индукцией по количеству вершин, что Вася может обеспечить себе победу для любой изначальной расстановки направлений (даже если перед первым ходом Васи все дороги ведут из города, где сейчас турист).

База – простой цикл (цикл без повторяющихся вершин и ребер). Пусть в простом цикле $A_1A_2\ldots A_n$ как-то расставлены стрелки на ребрах и турист смог пойти из A_1 в A_2. Вася будет разворачивать стрелки перед ним. Поэтому турист не сможет идти в обратную сторону. Допустим, турист смог дойти до A_1. Тогда перед ним разворачивают стрелку, и ему некуда идти. Петя проиграл.

Шаг индукции. Граф не является простым циклом. Выберем в нем цикл C минимальной длины (длина цикла – количество ребер в нем). Ясно, что C – простой и не содержит ребер, соединяющих «не соседние» вершины в цикле. Поэтому есть вершины вне C. Выберем из них вершину V с максимальным расстоянием до C. Обозначим граф без V буквой G. Ясно, что G связен и содержит цикл.

По предположению индукции, в G есть выигрышная стратегия для Васи при любой ориентации ребер. Внутри G Вася будет следовать ей. Так как в G Петя проигрывает, турист вынужден будет когда-то пойти в V. Тогда Вася развернет эту стрелку. Турист выйдет из V и снова окажется в G. У Васи опять есть выигрышная стратегия в G, которой он и будет следовать. Турист снова будет вынужден зайти в V, уменьшив количество стрелок, идущих из G в V. В конце концов они кончатся, и Петя проиграет в G, если он не проиграл раньше.

10–11 классы

2. Заметим (рис.11), что $CX : CY = BH_a : AH_b = \cos\angle B : \cos\angle A$. Кроме того, $\sin\angle OCX =$

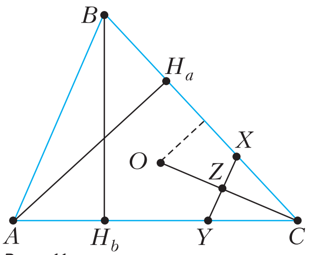


Рис. 11

$= \cos\angle A$, $\sin\angle OCY = \cos\angle B$. Отсюда

$$ZX : ZY = S_{CZX} : S_{CZY} =$$

$$= CX\sin\angle OCX : CY\sin\angle OCY = 1:1,$$

что и требовалось.

5. $k = 3$.

Оценка. Пусть дан треугольник ABC с медианами AX, BY, CZ. Оба угла BAX и BCZ не могут быть больше $30°$: иначе точки A и C лежат внутри окружности с хордой ZX и диаметром, в два раза большим ZX, но при этом $AC = 2ZX$, т.е. отрезок, равный диаметру, лежит строго внутри окружности – противоречие. Аналогично, в каждой из двух других пар максимум один угол больше $30°$.

Пример. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6 (рис.12).

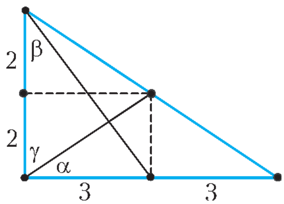


Рис. 12

Имеем $\operatorname{tg}30° < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta < \operatorname{tg}\gamma$, поскольку $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2}$.

7. Пусть k – количество жителей в городе. Будем изображать ситуацию в игре таблицей с n строками и k столбцами: в i-й строке будут перечислены благосостояния $a_{i1},\ldots,a_{ik}$ всех жителей i-го города в порядке неубывания. Пусть S_j – сумма чисел в j-м столбце.

а) *Стратегия Рокфеллера.* Если $S_j = S_{j+1}$, выбрать всех жителей из j-го столбца.

Предположим, что $S_j = S_{j+1}$; тогда $a_{ij} = a_{i,j+1}$ при всех i. После марксова перераспределения числа $S_{j+1},\ldots,S_k$ не уменьшатся. С другой стороны, у одного из выбранных жителей (пусть он в i-м городе) благосостояние станет больше чем a_{ij}. Это значит, что одна из сумм S_k при $k \geq j+1$ увеличится (та, в которую попало новое число). Поэтому последовательность $S_k, S_{k-1},\ldots,S_1$ лексикографически увеличится. Это не может продолжаться бесконечно долго (ибо наборов из k чисел с фиксированной суммой конечное количество), так что в некоторый момент все числа $S_1, \dots, S_k$ окажутся различными.

Пусть $S_1 \ge 1$. Тогда $S_i \ge i$ при всех i, откуда

$$nk = S_1 + \dots + S_k \ge 1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k+1),$$

т.е. $k \le 2n - 1$. Противоречие.

Значит, $S_1 = 0$, и Рокфеллер победил.

б) Пусть $k = 2n - 1$. Применяя стратегию из пункта а), Рокфеллер либо выиграет, либо добьется состояния $S_i = i$ при всех $i = 1, \dots, k$. Покажем, как ему выиграть, начиная с такой позиции.

Скажем, что игра находится в *i-й ситуации* ($1 \le i \le n+1$), если (возможно, после перенумерации строк) выполнены следующие условия:

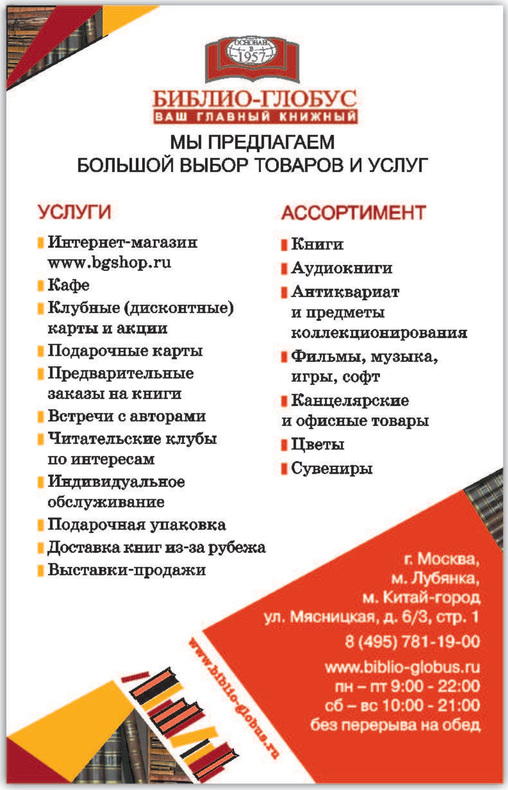
1) при $j = 1, 2, \dots, i-1$ в j-м столбце стоят j единиц в верхних клетках, а остальные числа – нули;

2) в i-м столбце нижние $n + 1 - i$ элементов – нули.

Покажем, что в рассматриваемый момент игра находится в i-й ситуации при некотором i. Переставим строки так, чтобы количества нулей в них не убывали сверху вниз. Пусть при некотором $i \le n$ в i-м столбце не стоит i единиц; выберем наименьшее такое i. Тогда (из условия на нули в строках) в предыдущих столбцах единицы стоят «треугольником», а в i-м столбце есть $n + 1 - i$ нулей, т.е. игра в i-й ситуации. Если же такого i нет, то в первых n столбцах единицы стоят «треугольником», и игра в $(n+1)$-й ситуации.

Покажем, что при $i > 1$, если игра в i-й ситуации, Рокфеллер может уменьшить номер ситуации одним ходом. Так он рано или поздно добьется 1-й ситуации, т.е. своего выигрыша.

Действительно, Рокфеллер выбирает $(i-1)$-й столбец. Пусть j – наименьший индекс, при котором число в j-й строке уменьшится (т.е. превратится в 0) в результате действия Маркса. Поскольку $j \le i - 1$, то после этого хода (и упорядочивания строк, при котором этот 0 переместится в начало строки) будет наблюдаться j-я ситуация (здесь мы уже не требуем равенств $S_k = k$), что и требовалось.



КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.Н.Аткарская, Д.Н.Гришукова, Я.В.Кучериненко, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Телефон: +7 495 363-48-86,
htpp: //capitalpress.ru

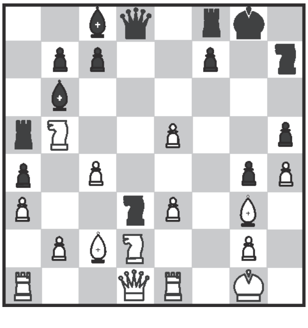
МистеР 100

Китайский гроссмейстер Дин Лижэнь в 2017–2018 годах провел 100 партий в классические шахматы подряд без поражений, получив за это уважительное прозвище «Мистер 100» и перекрыв достижение Михаила Таля, чья серия насчитывала 95 игр. Всего 11 партий не хватило китайскому гроссмейстеру для того, чтобы побить рекорд Сергея Тивякова 2004–2005 годов. Однако, в отличие от него, Дин Лижэнь смог пройти без поражений соревнования самого высокого уровня, такие как турнир претендентов и шахматная олимпиада, на которой сборная Китая стала чемпионом. Лишь вдохновенная игра француза М.Вашье-Лаграва смогла прервать эту грандиозную серию побед.

М.Вашье-Лаграв – Дин Лижэнь

Шеньжэнь, 2018

1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗c4 ♞f6 4. d3 ♝c5 5. 0-0 0-0 6. ♖e1 d6 7. c3 a5 8. ♗g5 h6 9. ♗h4 g5 10. ♗g3 ♝a7 11. ♘a3 ♞h7 12. ♘d2 g4?! Слишком рискованный план, связанный с наступлением пешек на королевском фланге, надежнее было 12...a4. **13. ♘b5 ♝b6 14. ♗b3 a4 15. ♗c2!** Отказ от принятия жертвы пешки – верное решение, иначе после 15. ♗a4 h5! 16. h4 gh черные развивали опасную инициативу. **15...h5 16. h4 d5 17. d4 de 18. de ♜a5 19. c4 e3 20. fe ♞b4 21. a3 ♞d3.**



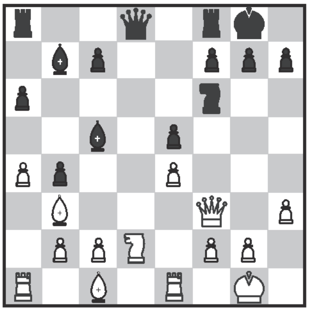
22. b4!?. Жертвуя качество, белые сохраняют пешечный контроль над центральными полями, а их легкие фигуры значительно сильнее, чем у черных. **22...ab 23. ♘b3 ♞e1 24. ♕e1 ♜a6 25. c5 ♝a7 26. ♕b1 f5 27. ef?!** Неточность. По оценке компьютера, после 27. ♗b3 ♝e6 28. ♕c2 у белых подавляющая позиция. Впрочем, и ход в партии не выпускает преимущество. **27... ♞f6 28. ♘a7 ♜a7 29. ♘d4 ♛e7 30. ♗f4 ♛c5 31. ♗b3+ ♚g7 32. ♗e6 ♜a4 33. ♕d3 ♜a6 34. ♗c8 ♜c8 35. ♕a6 ♛d4 36. ♕f1 ♛e4.** После тактических осложнений материальный баланс уравнялся, но фигуры белых значительно активнее. **37. ♖d1 c5 38. ♖d6 ♛e7 39. ♕a1 ♚f7 40. ♗e5 ♞e4 41. ♖h6 ♛h4 42. ♕f1+ ♚e7 43. ♖h7+ ♚e6 44. ♗c7.** Пользуясь раскрытым положением черного короля, белые выигрывают качество (грозит ♕f7×) и следом партию. **44... ♜c7 45. ♖c7 ♞d6 46. ♖c5 b6 47. ♖c6 g3 48. ♕f3 ♛h2+ 49. ♔f1 ♛h1+ 50. ♔e2 ♛b1 51. ♕h5 ♛a2+ 52. ♔f3 ♚d7 53. ♖b6 ♛f2+ 54. ♔g4 ♛e2+ 55. ♔h4 ♛g2 56. ♕h7+ ♚c8 57. ♕g8+ ♚d7 58. ♖d6+. Выигрыш белых.**

Было бы несправедливо по отношению к китайскому гроссмейстеру не опубликовать пример его победного творчества. Мы уже представляли его замечательную партию против Бай Цзиньши, настоящее украшение шахматного 2017 года («Квант» №1 за 2018 г.). Вот партия, в которой благодаря интересному маневру в испанской партии был повержен российский гроссмейстер Э.Инаркиев.

Э.Инаркиев – Дин Лижэнь

Пальма-де-Мальорка, 2017

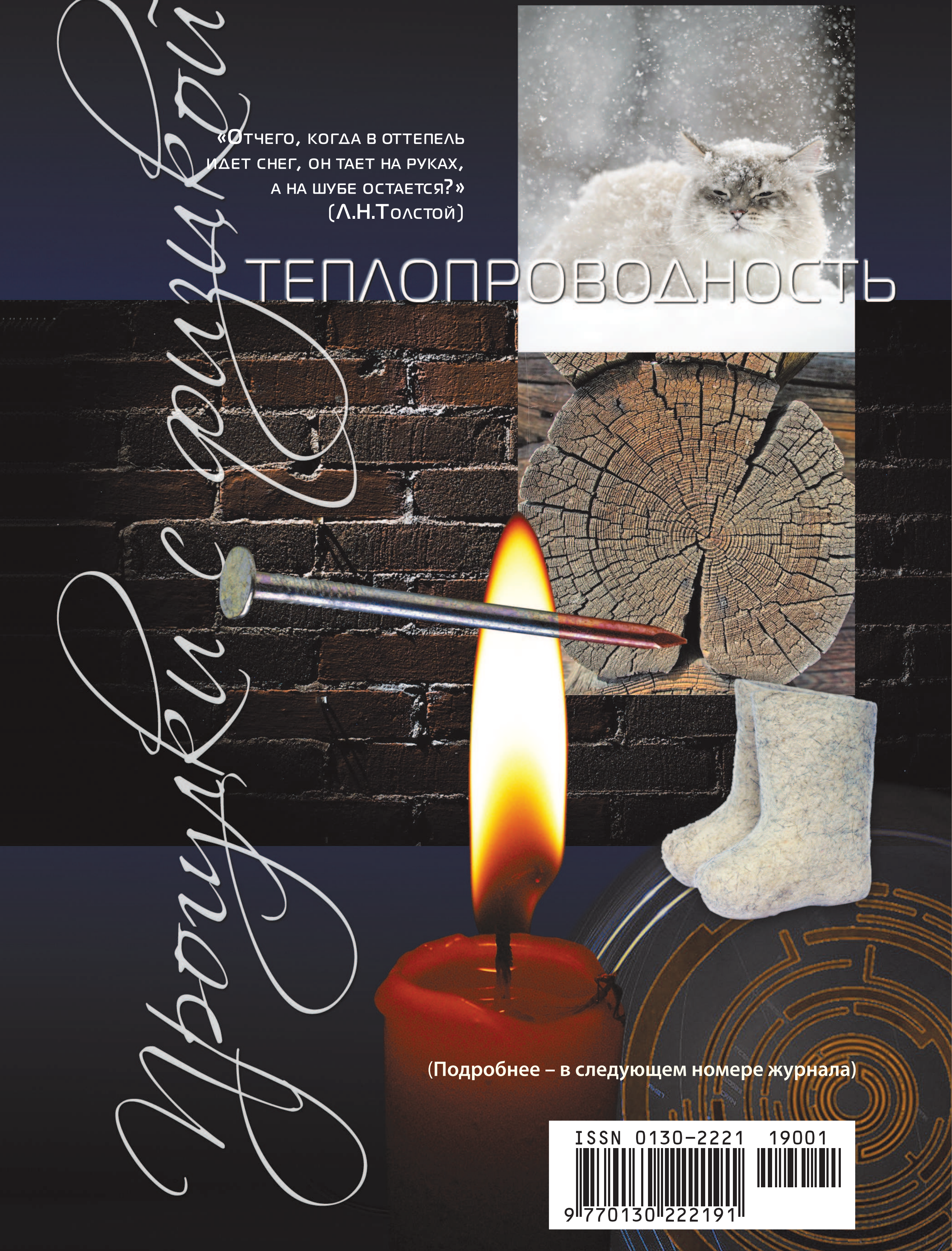
1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♞f6 5. 0-0 ♝e7 6. ♖e1 b5 7. ♗b3 0-0 8. a4 b4 9. d4 d6 10. de ♞e5 11. ♘e5 de 12. ♕f3 ♝c5 13. h3 ♝b7. 14. ♘d2.



14... ♚h8!? Черные уводят короля из-под связки, подготавливая ♞e4 с дальнейшим f5. **15. ♕g3 ♛e7 16. ♕h4?!** С виду безобидный и логичный ход белых, освобождающий коня от необходимости защищать пешку e4, наталкивается на неожиданный ответ: **16...g5!** Жертвуя пешку, черные развивают сильную атаку. **17. ♕g5 ♜g8 18. ♕f5 ♜g7 19. ♘f3?!** Сильнее 19. ♘f1 ♜ag8 20. g3 h5, однако и в этом случае преимущество на стороне черных. **19... ♜ag8 20. ♗g5 ♞e4!** Сокрушительный удар, который приводит черных к победе. Ферзя брать нельзя из-за мата в два хода: 21. ♗e7 ♜g2 22. ♔h1 ♞f2×, остальные продолжения также не спасают. **21. h4 ♞g5 22. hg ♜g5 23. ♘g5 ♜g5 24. ♕h3 ♛f6 25. ♖e3 ♜g2+ 26. ♕g2 ♝g2 27. ♔g2 ♝e3 28. fe c5.** В результате комбинации черные получили выигранный эндшпиль «ферзь против ладьи и слона», в котором из-за разрозненности фигур и открытого положения короля шансы на спасение белых минимальны. **29. ♗c4 ♛g6+ 30. ♔f3 ♛f5+ 31. ♔g3 ♛e4 32. b3 ♛e3+ 33. ♔g2 ♛d2+ 34. ♔h1 f5 35. ♖g1 ♛h6+ 36. ♔g2 ♚g7 37. ♖d1 ♛g5+ 38. ♔f2 ♛f4+ 39. ♔e2 ♛h2+ 40. ♔e3 f4+ 41. ♔e4 ♛c2+ 42. ♖d3 ♚f6 43. ♗a6 ♛g2+ 44. ♖f3 ♚e6.** Защиты от двойной угрозы ♛g6× и ♛e2+ с выигрышем ладьи нет, поэтому **белые сдались.**

А.Русанов

Индекс 90964



ISSN 0130-2221 19001
9 770130 222191